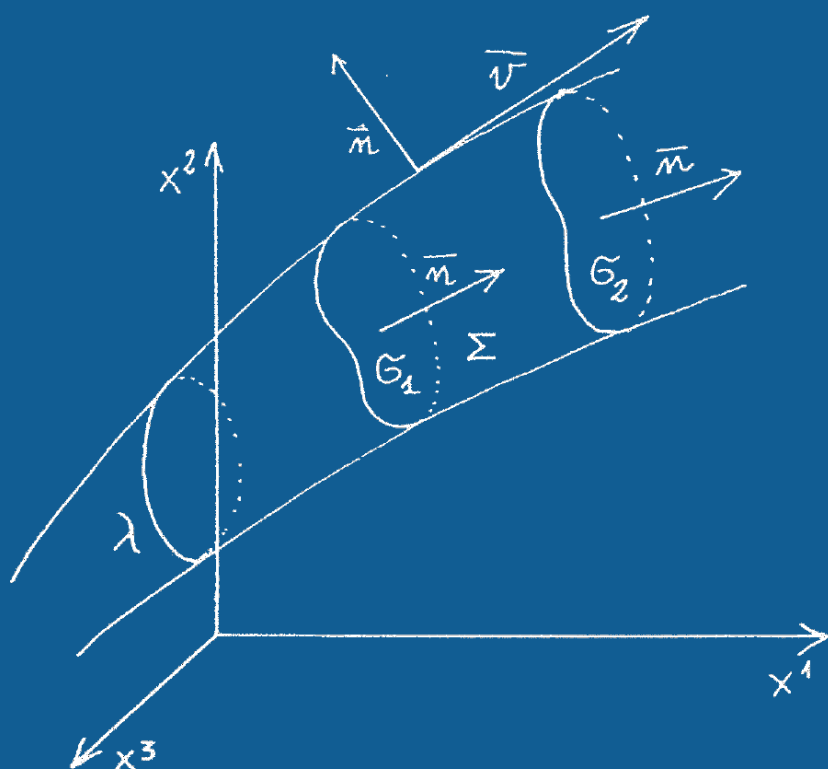


Meccanica dei fluidi e fisica matematica tra ricerca e insegnamento

L'opera di Antonio Melis

UNICApress/ateneo

a cura di
Francesco Borghero
Francesco Demontis
Maria Polo



Il Prof. Antonio Melis, nato a Bitti (Prov. di Nuoro) il 28 Marzo 1929, si è laureato giovanissimo, poco più che ventiduenne, presso l'Università di Cagliari il 29 febbraio 1952 discutendo la tesi: "Sulla soluzione del problema biarmonico esterno mediante rappresentazione conforme sul cerchio, ed applicazione al problema della piastra elastica con foro ellittico", essendo relatore il Prof. Giuseppe Aymerich. Per il Prof. Aymerich, suo Maestro, ha sempre nutrito e manifestato in ogni occasione un'ammirazione sconfinata.

Dopo aver insegnato per tre anni nelle Scuole Medie, nel 1954, all'età di 25 anni, è stato nominato Assistente Incaricato alla Cattedra di Meccanica Razionale presso l'Università di Cagliari. Nell'anno 1956 ha conseguito l'Abilitazione all'insegnamento della Matematica e della Fisica nei licei statali ed ha vinto il concorso a cattedre per l'insegnamento della Matematica nella Scuola Media. Ha rinunciato al posto di ruolo assegnatogli nelle Scuole Medie in quanto, sempre nel 1956, ha vinto il concorso per il posto di Assistente Ordinario di Meccanica Razionale presso l'Istituto Matematico dell'Università di Cagliari.

La Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari, a partire dall'Anno Accademico 1957-58, gli ha affidato diversi incarichi di insegnamento, fra i quali il corso di "Esercitazioni di Matematica II, per Chimici", nel triennio 1957-60 e quello di "Calcoli Numerici e Grafici", nel triennio 1960-63.

Nell'anno 1967 ha conseguito l'Abilitazione alla Libera Docenza in Meccanica Razionale.

Infine, a partire dall'Anno Accademico 1960-61, ha avuto l'incarico dell'insegnamento della "Meccanica Razionale con elementi di Statica Grafica" presso la Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Cagliari, incarico che gli è stato via via confermato, tutti gli anni, fino al passaggio nel ruolo dei Professori Associati.

Dal 1975, prosegue l'insegnamento di Fisica Matematica per il Corso di Laurea in Matematica e insegna Meccanica Razionale presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Cagliari fino al 1999.

Per la sua attività di ricerca nel campo della Meccanica e della Fisica Matematica gli sono stati conferiti ripetutamente dalla Facoltà d'Ingegneria numerosi premi di operosità scientifica. Infine, non è trascurabile, un altro efficace apporto del Prof. Melis all'attività della Facoltà di Scienze costituito dall'opera che egli ha esplicato per diversi anni, fin dal 1961, in qualità di Segretario del Seminario Scientifico: in tale veste egli ha curato sia la Biblioteca del Seminario e gli scambi delle pubblicazioni, sia la Redazione dei Rendiconti del Seminario stesso.

UNICApres/ateneo

Meccanica dei fluidi e fisica matematica tra ricerca e insegnamento

L'opera di Antonio Melis

**Ristampa anastatica della produzione
1955-1999**

a cura di

Francesco Borghero, Francesco Demontis, Maria Polo



**Cagliari
UNICApres
2022**

Meccanica dei fluidi e fisica matematica tra ricerca e insegnamento

Francesco Borghero, Francesco Demontis, Maria Polo

In copertina: Flusso di un campo solenoidale (grafico di Antonio Melis; in questo volume a p. [251])

© Antonio Melis e detentori rispettivi copyright

CC-BY-SA 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Cagliari, UNICApres, 2022 (<http://unicapress.unica.it>)

e-ISBN: 978-88-3312-072-0

ISBN: 978-88-3312-071-3

DOI: 10.13125/unicapress.978-88-3312-072-0

INDICE

VII Premessa

IX Biografia di Antonio Melis

X Nota di Francesco Borghero

XIII Pubblicazioni di Antonio Melis

[17] Ristampa degli articoli

[227] Elementi di meccanica dei Fluidi: aerodinamica. Manuale del
Corso di Fisica Matematica. A.A. 1991-1992

Premessa

Siamo estremamente lieti che il Dipartimento di Matematica e Informatica della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari ci abbia affidato la redazione di questo volumetto che raccoglie le pubblicazioni¹ del Prof. Antonio Melis, decano del Dipartimento, in occasione del suo 93-esimo compleanno. La pubblicazione di questa raccolta di lavori che coprono il periodo dal 1955 al 1999 si inserisce nella linea di altre pubblicazioni dell'Ateneo che UnicaPress ha promosso per i 400 anni dalla fondazione dell'Università degli Studi di Cagliari.

La ricerca nel settore della Fisica Matematica e l'insegnamento presso la Facoltà di Scienze FF.MM.NN. e di Ingegneria sono i luoghi dove la passione del Professor Melis per la matematica e per l'insegnamento hanno preso vita. Egli con immutata passione ha raccontato i suoi esordi e la sua vita nell'allora Istituto di Matematica e nell'Istituto di Matematica per Ingegneri, nel suo intervento il 19 Marzo 2021 in occasione dell'evento organizzato dalla Facoltà di Scienze nell'ambito delle celebrazioni per i 400 anni dell'Università di Cagliari.

La sua narrazione² ci trasporta in un recente passato che pur immensamente differente dall'oggi ci restituisce gli aspetti più profondamente immutabili del rapporto umano e scientifico del docente e del maestro con i colleghi e con gli allievi.

Cagliari, Novembre 2022

Francesco Borghero, Francesco Demontis e Maria Polo

¹ Si ringraziano le case editrici e i loro direttori che hanno concesso la ristampa dei lavori.

² Il video dell'intervento https://www.youtube.com/watch?v=dCNahXB_LaA

Biografia di Antonio Melis

Il Prof. Antonio Melis, nato a Bitti (Prov. di Nuoro) il 28 Marzo 1929, si è laureato giovanissimo, poco più che ventiduenne, presso l'Università di Cagliari il 29 febbraio 1952 discutendo la tesi: "Sulla soluzione del problema biarmonico esterno mediante rappresentazione conforme sul cerchio, ed applicazione al problema della piastra elastica con foro ellittico", essendo relatore il Prof. Giuseppe Aymerich. Per il Prof. Aymerich, suo Maestro, ha sempre nutrito e manifestato in ogni occasione un'ammirazione sconfinata.

Dopo aver insegnato per tre anni nelle Scuole Medie, nel 1954, all'età di 25 anni, è stato nominato Assistente Incaricato alla Cattedra di Meccanica Razionale presso l'Università di Cagliari. Nell'anno 1956 ha conseguito l'Abilitazione all'insegnamento della Matematica e della Fisica nei licei statali ed ha vinto il concorso a cattedre per l'insegnamento della Matematica nella Scuola Media. Ha rinunciato al posto di ruolo assegnatoli nelle Scuole Medie in quanto, sempre nel 1956, ha vinto il concorso per il posto di Assistente Ordinario di Meccanica Razionale presso l'Istituto Matematico dell'Università di Cagliari.

La Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari, a partire dall'Anno Accademico 1957-58, gli ha affidato diversi incarichi di insegnamento, fra i quali il corso di "Esercitazioni di Matematica II, per Chimici", nel triennio 1957-60 e quello di "Calcoli Numerici e Grafici", nel triennio 1960-63.

Nell'anno 1967 ha conseguito l'Abilitazione alla Libera Docenza in Meccanica Razionale.

Infine, a partire dall'Anno Accademico 1960-61, ha avuto l'incarico dell'insegnamento della "Meccanica Razionale con elementi di Statica Grafica" presso la Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Cagliari, incarico che gli è stato via via confermato, tutti gli anni, fino al passaggio nel ruolo dei Professori Associati.

Dal 1975, prosegue l'insegnamento di Fisica Matematica per il Corso di Laurea in Matematica e insegna Meccanica Razionale di presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Cagliari fino al 1999.

Per la sua attività di ricerca nel campo della Meccanica e della Fisica Matematica gli sono stati conferiti ripetutamente dalla Facoltà d'Ingegneria numerosi premi di operosità scientifica. Infine, non è trascurabile, un altro efficace apporto del Prof. Melis all'attività della Facoltà di Scienze costituito dall'opera che egli ha esplicato per diversi anni, fin dal 1961, in qualità di Segretario del Seminario Scientifico: in tale veste egli ha curato sia la Biblioteca del Seminario e gli scambi delle pubblicazioni, sia la Redazione dei Rendiconti del Seminario stesso.

Nota di Francesco Borghero

Conobbi il Prof. Antonio Melis, per la prima volta, nel Marzo del 1984 quando, vincitore di un concorso per Ricercatore di Fisica Matematica fui chiamato dalla Facoltà di Scienze a ricoprire quel posto. Io non ho avuto la fortuna, come studente universitario, di essere stato suo allievo perché provenivo dall'Università di Roma dove conseguii la laurea in Matematica.

Mi colpirono subito le sue qualità umane, nobiltà d'animo, fertilità di intelligenza, sensibilità e grande amore per il prossimo, qualità sostenute da una fede profonda che si concretizzava in una esemplare coesione familiare, basata su saldissimi legami affettivi. Io ero un po' spaesato e disorientato ai primi contatti che ebbi con i colleghi dell'Istituto Matematico, ma lui ed anche il compianto Prof. Benedetto Piras, se ne resero conto e subito mi aiutarono ad inserirmi nel nuovo ambiente. Benedetto e Tonio, come poi iniziai a chiamarli, sono i primi colleghi con cui ho condiviso anni di collaborazione. Tonio, in particolare mi avviò alla ricerca e volle che firmassimo assieme il mio primo lavoro scientifico su di un problema sul quale lui e Benedetto stavano lavorando da qualche anno: il cosiddetto Problema di Szebehely – che è sostanzialmente il Problema Inverso della Dinamica - sul quale io poi continuai a lavorare sotto la sua guida. Nonostante lui tenesse il corso di Meccanica Razionale alla Facoltà di Ingegneria, con sede in Piazza d'armi, e nonostante gli impegni familiari, avendo 5 figli da accudire, con grande sacrificio, quasi tutti i pomeriggi, veniva al Palazzo delle

Scienze per lavorare con me nel suo studio. Da quegli incontri imparai non solo che cosa significasse fare ricerca, ma appresi da Tonio moltissime questioni riguardanti la didattica della Meccanica Razionale, soprattutto come si affronta la risoluzione dei problemi in cui lui era un vero Maestro.

Assieme alla amatissima consorte Maria Rosa, hanno sempre avuto per i figli, un' immensa attenzione e sono sempre stati e tuttora sono, anche per i numerosissimi nipoti, nello stesso tempo modello e guida discreta. Ora i figli sono quasi tutti impegnati in attività scientifiche, infatti Enrico, Maria Cristina e Francesco hanno conseguito la laurea in ingegneria, Federico la laurea in Fisica e Maria Teresa la laurea in Geologia.

D'indole riservata, spesso brillante ma anche disposto allo scherzo, il Prof. Melis è sempre stato cordiale con tutti e capace di stabilire rapporti di confidenza e fiducia.

Questo è per me Tonio Melis; con grande amicizia ed affetto gli auguro di cuore di festeggiare ancora in salute, assieme alla gentilissima Maria Rosa, tanti tanti sereni compleanni.

L'allievo e amico Francesco Borghero

Publicazioni di Antonio Melis

1. Un esempio di sistema anolonomo non lineare: il pattino guidato. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 3-4, Vol. XXV, 1955 [pp. 17-29].
2. Su una classe di moti piani non stazionari di fluidi comprimibili con linee di flusso permanenti. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 1-2, Vol. XXVIII, 1958 [pp. 31-40].
3. A proposito di una proprietà del rotore di un campo vettoriale. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 1, Vol. XXX, 1960 [pp. 41-45].
4. L'autoconfinamento di una colonna di plasma in regime adiabatico. *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. 96, 1961-62 [pp. 47-60].
5. Risoluzione numerica della equazione:
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{n} \frac{dn}{dr} \right) + L n = 0$$
 riguardante il problema dell'autoconfinamento adiabatico di un plasma. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 3-4, Vol. XXXIII, 1963 (Lavoro fatto in collaborazione con Franco Testa) [pp. 61-69].
6. Su alcuni moti piani non isentropici e non stazionari di un fluido comprimibile. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 3-4, Vol. XXXIV, 1964 [pp. 71-82].
7. Su una classe di moti non stazionari di un gas perfetto. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 3-4, Vol. XXXV, 1965 [pp. 83-91].

8. Perturbazioni piane di un moto unidimensionale in magnetofluidodinamica. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 3-4, Vol. XXXV, 1965 [pp. 93-103].
9. La riflessione di un'onda di rarefazione su di una parete fissa. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 3-4, Vol. XXXIX, 1969 (Lavoro fatto in collaborazione con Franco Testa) [pp. 105-117].
10. Su alcuni movimenti di un ellissoide rotondo con cavità completamente riempita di liquido. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 3-4, Vol. XXXIX, 1969 (Lavoro fatto in collaborazione con Benedetto Piras) [pp. 119-132].
11. Sul periodo della precessione Euleriana della Terra secondo il modello di Kelvin. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 1-2, Vol. XLIII, 1973 (Lavoro fatto in collaborazione con Benedetto Piras) [pp. 133-142].
12. Sulla precessione Euleriana della Terra secondo il modello di Kelvin. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Estratto dal volume: *Atti del Convegno internazionale sulla "Rotazione della Terra e Osservazioni di Satelliti Artificiali"*, Cagliari 16-18 Aprile 1973 [pp. 143-149].
13. Sul potenziale delle forze relativo ad una assegnata famiglia di orbite. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Fasc. 1-2, Vol. XLIX, RSFSAK 49, 1-304, 1979 [pp. 151-160].
14. Rotazioni permanenti di un ellissoide con cavità completamente riempita di liquido autogravitante. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Supplemento al Vol. L, RSFSAK 50, 1-322, 1980 (Lavoro fatto in collaborazione con Benedetto Piras) [pp. 161-170].
15. On a generalization of Szebehely's problem. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Vol. LII, Fasc. I, 1982 (Lavoro fatto in collaborazione con Benedetto Piras) [pp. 171-179].

16. An extension of Szebehely's problem to holonomic systems. *Celestial Mechanics*, 32, (1984), 87-92 (Lavoro fatto in collaborazione con Benedetto Piras) [pp. 181-186].
17. Una osservazione sul "problema inverso generalizzato di Szebehely". *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, Vol. LIV. Fasc. 2, 1984 (Lavoro fatto in collaborazione con Benedetto Piras) [pp. 187-192].
18. An observation on the inverse extended problem of Szebehely. *Celestial Mechanics*, 36 (1985), 83-87 (Lavoro fatto in collaborazione con Benedetto Piras) [pp. 193-197].
19. On Szebehely's problem extended to holonomic systems with a given integral of motion, *Meccanica, Journal of the Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics AIMETA*, Vol. 21, No. 2, pp. 71-74, June 1986 (Lavoro fatto in collaborazione con Francesco Borghero) [pp. 199-204].
20. On Szebehely's problem for holonomic systems involving generalized potential functions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 49: 273-284, 1990 (Lavoro fatto in collaborazione con Francesco Borghero) [pp. 205-216].
21. Inverse and Direct problem of the Dynamics of a Central motion. *Rendiconti di Matematica*, Serie VII, Volume 19, Roma (1999), 303-316 (Lavoro fatto in collaborazione con Francesco Borghero e George Bozis) [pp. 217-230].
22. Corso di Fisica Matematica: Elementi di Meccanica dei Fluidi, Aerodinamica. Lezioni raccolte dal Prof. Melis nell'Anno Accademico 1991-92 [pp. 231-347].

RENDICONTI
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

ANTONIO MELIS

**UN ESEMPIO DI SISTEMA ANOLONOMO NON LINEARE:
IL PATTINO GUIDATO**

(Estratto dal fasc. 3-4 Vol. XXV 1955)

CAGLIARI
Società Editoriale Italiana
1956

ANTONIO MELIS

Un esempio di sistema anolonomo non lineare:

Il pattino guidato*

SUNTO — Si studia un sistema dinamico a vincoli anolonomi non lineari costituente una generalizzazione del pattino consueto, e denominato pattino a corpo guidato.

I — Posizione del problema.

È ben noto ⁽¹⁾ che un pattino *generico* (con baricentro e *coltello* generalmente distinti) costituisce un sistema meccanico a tre gradi di libertà soggetto ad un vincolo anolonomo lineare del primo ordine. Assunto infatti, nel piano del moto, un sistema di assi cartesiani ortogonali di riferimento ed indicate con x, y le coordinate del punto di contatto e con ϑ l'angolo che la direzione della velocità del pattino forma con la direzione dell'asse x , il vincolo cui esso è soggetto si traduce nella relazione non integrabile:

$$\dot{y} \cos \vartheta - \dot{x} \sin \vartheta = 0,$$

dove il punto sovrapposto indica la derivazione rispetto al tempo.

Dicendo *centrato* un pattino allorchè il suo baricentro coincide col punto d'appoggio, un pattino *generico* π può ovviamente considerarsi come caso particolare di un sistema — *pattino a corpo snodato* — costituito di un pattino centrato π_c e di un'asta, poggiante senza attrito sul piano del moto, incernierata sul centro di π_c e formante con esso un angolo φ

* Nota presentata alla redazione il 24-6-55.

⁽¹⁾ G. HAMEL: «*Theoretische Mechanik*» - Berlin 1949.

variabile nel tempo con legge assegnata, allorchè si supponga φ costantemente uguale a zero.

Ad una ulteriore generalizzazione si perviene considerando un sistema, che designeremo come *pattino a corpo guidato* (slitta) consistente in un pattino centrato ed in una asta incernierata sul centro del pattino, formante con esso un angolo φ funzione assegnata del tempo ed impedita in ogni suo sbandamento da un tagliente a tenuta di strada.

Nel presente scritto studieremo dapprima il pattino a corpo snodato (§ 2) impostandone le equazioni generali e soffermandoci su qualche caso particolare. Nel § 3 considereremo similmente il più generale pattino a corpo guidato.

2 — Il pattino a corpo snodato.

Immaginiamo dunque che nel baricentro A del pattino centrato π_c sia imperniata, mediante cerniera priva di attrito ad asse verticale, un'asta rigida AB la cui direzione orientata da A verso B formi con l'asse delle x un certo angolo α , onde è $\varphi - \alpha + \vartheta = 2\pi$. Si ha allora un sistema a quattro gradi di libertà.

Ricordiamo ⁽²⁾ che per un sistema ad n gradi di libertà le cui coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \dots, q_n$ siano soggette a vincoli anolonomi del tipo:

$$f_r(q^h, \dot{q}^h, \ddot{q}^h, \dots, {}^{(P)}q^h, t) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, l \\ h = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

le equazioni lagrangiane parametriche del moto assumono la forma:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial T}{\partial q^h} = Q_h + \sum_{r=1}^l \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial q^h} {}^{(P)}$$

⁽²⁾ L. CASTOLDI: «Sopra una definizione di spostamento virtuale valida per vincoli di natura qualunque». Rend. Ist. Lombardo di Sc. e Lett. Vol. LXXIX, fasc. I - ed anche: «Equazioni lagrangiane per i sistemi a vincoli anolonomi non lineari nelle velocità». Idem, Vol. LXXX, fasc. I.

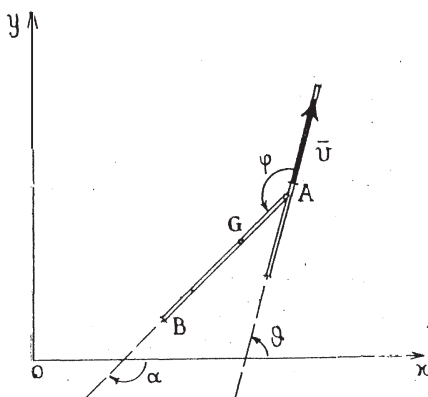


Fig. 1

dove T è l'energia cinetica del sistema, le Q_h sono le componenti lagrangiane delle forze attive ed i parametri λ_r sono dei *moltiplicatori* a priori arbitrari; e proponiamoci di scrivere dette equazioni per il pattino a corpo snodato.

Denotando con J_1 e J_2 i momenti d'inerzia, rispettivamente di π_a e dell'asta, relativi all'asse della cerniera, l'energia cinetica del sistema è:

$$(2) \quad T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (J_1 \dot{\vartheta}^2 + J_2 \dot{\alpha}^2) - s m_2 \dot{\alpha} (\dot{x} \sin \alpha - \dot{y} \cos \alpha)$$

dove $m = m_1 + m_2$ è la massa totale del sistema, somma delle masse m_1 del pattino ed m_2 dell'asta, ed s è la distanza del baricentro G dell'asta dalla cerniera A . Si noterà, che, conformemente alla teoria generale dei sistemi anolonomi, l'espressione (2) dell'energia cinetica è quella che compete al sistema, senza tener conto della presenza di tali vincoli. Di questa osservazione occorrerà tener conto in tutto il seguito del presente lavoro.

Poichè l'unico vincolo cui è soggetto il sistema si traduce ancora nella relazione non integrabile:

$$(3) \quad \dot{y} \cos \vartheta - \dot{x} \sin \vartheta = 0$$

le equazioni (1) del moto sono:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (m \dot{x} - s m_2 \dot{\alpha} \sin \alpha) = X - \lambda \sin \vartheta \\ \frac{d}{dt} (m \dot{y} + s m_2 \dot{\alpha} \cos \alpha) = Y + \lambda \cos \vartheta \\ J_1 \ddot{\vartheta} = M_{\vartheta} \\ \frac{d}{dt} [J_2 \dot{\alpha} - s m_2 (\dot{x} \sin \alpha - \dot{y} \cos \alpha)] + s m_2 \dot{\alpha} (\dot{x} \cos \alpha + \dot{y} \sin \alpha) = M_{\alpha} \end{array} \right.$$

dove con $X, Y, M_{\vartheta}, M_{\alpha}$ si sono denotate le componenti lagrangiane delle forze attive.

Le equazioni (4), insieme con la relazione (3) esprimente il vincolo, determinano analiticamente il problema.

Eliminando λ tra la prima e la seconda delle (4) ed indicando con F_{τ} la componente delle forze attive secondo la di-

rezione del pattino, le equazioni (4) assumono la forma:

$$(5) \quad \begin{cases} m(\ddot{x} \cos \vartheta + \ddot{y} \sin \vartheta) - s m_2 [\ddot{\alpha}^2 \cos(\alpha - \vartheta) + \ddot{\alpha} \sin(\alpha - \vartheta)] = F_\tau \\ J_1 \ddot{\vartheta} = M_\vartheta \\ J_2 \ddot{\alpha} - s m_2 (\ddot{x} \sin \alpha - \ddot{y} \cos \alpha) = M_\alpha \end{cases}$$

alle quali si deve sempre associare la (3).

Introduciamo ora la velocità $\bar{v}$ di A — automaticamente diretta secondo π_α — ponendo:

$$\dot{x} = v \cos \vartheta; \quad \dot{y} = v \sin \vartheta$$

da cui

$$\ddot{x} = \dot{v} \cos \vartheta - v \dot{\vartheta} \sin \vartheta; \quad \ddot{y} = \dot{v} \sin \vartheta + v \dot{\vartheta} \cos \vartheta.$$

Naturalmente, con ciò la relazione vincolare (3) è identicamente soddisfatta, mentre le (5) diventano:

$$(6) \quad \begin{cases} m \dot{v} - s m_2 [\dot{\alpha}^2 \cos(\alpha - \vartheta) + \ddot{\alpha} \sin(\alpha - \vartheta)] = F_\tau \\ J_1 \ddot{\vartheta} = M_\vartheta \\ J_2 \ddot{\alpha} - s m_2 [\dot{v} \sin(\alpha - \vartheta) - v \dot{\vartheta} \cos(\alpha - \vartheta)] = M_\alpha. \end{cases}$$

È facile verificare che dalle (6), come si è accennato nel § 1, si possono dedurre le equazioni che regolano il moto di un pattino *generico*. Ponendo infatti:

$$\varphi = 0 \quad \text{ossia} \quad \vartheta = \alpha + 2\pi, \quad m_1 = 0, \quad J_1 = 0,$$

e quindi

$$J_2 = J, \quad m_2 = m,$$

le equazioni di LAGRANGE precedentemente scritte risultano:

$$(7) \quad \begin{cases} m \dot{v} - s m \dot{\vartheta}^2 = F_\tau \\ J \ddot{\vartheta} + s m v \dot{\vartheta} = M_\alpha. \end{cases}$$

Supponendo poi le forze attive tutte nulle, queste ultime

relazioni diventano:

$$(7) \quad \begin{cases} m \dot{v} - s m \dot{\vartheta} = 0 \\ J \ddot{\vartheta} + s m v \dot{\vartheta} = 0, \end{cases}$$

in accordo con le formule contenute nel testo citato dell' HAMEL.

Esaminiamo ora il caso particolare in cui, al vincolo anolonomo già indicato, sia sovrapposta l'ipotesi più restrittiva che sia sempre:

$$\vartheta = 0 \quad \text{e quindi} \quad \dot{\vartheta} = 0.$$

Se supponiamo $J_2 \ll J_1$ ed $m_2 \ll m_1$ e che l'unica forza applicata sia quella *motrice* F_τ , che riterremo costante per semplicità, dalle (6) si ricava:

$$(8) \quad \begin{cases} m \dot{v} \simeq F_\tau \quad \text{ossia} \quad \dot{v} \simeq \text{cost} \\ \ddot{\alpha} - \frac{s m_2 \dot{v}}{J_2} \text{sen } \alpha = 0. \end{cases}$$

Se poniamo $\frac{s m_2 \dot{v}}{J_2} = K \simeq \text{cost}$ otteniamo infine:

$$\ddot{\alpha} - K \text{sen } \alpha = 0.$$

Durante il moto si presentano quindi tre eventualità:

- I) $\dot{v} > 0$, ossia $K > 0$. La velocità è crescente ed α varia con legge oscillatoria attorno al valore $\alpha = \pi$.
- II) $\dot{v} < 0$, cioè $K < 0$. La velocità diminuisce ed α corrispondentemente varia con legge oscillatoria attorno al valore $\alpha = 0$.
- III) $\dot{v} = K = 0$. La velocità è costante ed α varia linearmente col tempo, in particolare è costante.

3 — Il pattino a corpo guidato.

Mostriamo come la considerazione accennata all'inizio di un *pattino a corpo guidato* porti a un sistema meccanico soggetto ad un vincolo anolonomo del primo ordine *non lineare*.

Se supponiamo infatti che anche l'asta trainata non possa slittare normalmente alla sua direzione per effetto di un col-

tello a tenuta di strada ad essa applicato, è chiaro che non varranno più le considerazioni fatte finora, in quanto adesso sussiste, come si vedrà, un legame fra la velocità del punto A e l'angolo α . Il pattino centrato fungerà da *guida* e l'asta sarà da esso trainata. Si potranno avere variazioni dell'angolo α soltanto quando v sia diversa da zero.

Infatti, detto P il punto di contatto del traino col piano del moto, usando le notazioni fin qui adottate e ponendo $|P - A| = l$, per il teorema di CHASLES sui moti rigidi piani si deve avere:

$$(9) \quad \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{l |\dot{\alpha}|}{|\sin(\alpha - \vartheta)|}$$

od anche

$$(10) \quad (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \sin^2(\alpha - \vartheta) - l^2 \dot{\alpha}^2 = 0.$$

La (10) è una relazione non integrabile che lega $\dot{x}$, $\dot{y}$, ed $\dot{\alpha}$: rappresenta quindi un *vincolo anolonomo del primo ordine non lineare*. Naturalmente bisogna tener conto, oltre che della (9), anche della relazione (3) traducente il vincolo imposto al *pattino guida*.

Ricordando l'espressione (2) dell'energia cinetica nonchè le equazioni (1) e le relazioni (3) e (10), le equazioni parametriche del moto diventano:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (m \dot{x} - s m^2 \dot{\alpha} \sin \alpha) = X - \lambda_1 \sin \vartheta + \lambda_2 \dot{x} \sin^2(\alpha - \vartheta) \\ \frac{d}{dt} (m \dot{y} + s m_2 \dot{\alpha} \cos \alpha) = Y + \lambda_1 \cos \vartheta + \lambda_2 \dot{y} \sin^2(\alpha - \vartheta) \\ J_1 \ddot{\vartheta} = M_{\vartheta} \\ J_2 \ddot{\alpha} - s m_2 (\ddot{x} \sin \alpha - \ddot{y} \cos \alpha) = M_{\alpha} - \lambda_2 l^2 \dot{\alpha}, \end{cases}$$

le quali, insieme con le (3) e (9), determinano analiticamente il problema.

Ponendo ora:

$$\dot{x} = v \cos \vartheta, \quad \dot{y} = v \sin \vartheta,$$

ed eliminando λ_1 si ha:

$$(12) \quad \begin{cases} m \dot{v} - s m_2 [\dot{\alpha}^2 \cos(\alpha - \vartheta) + \ddot{\alpha} \sin(\alpha - \vartheta)] = F_\tau + \lambda_2 v \sin^2(\alpha - \vartheta) \\ J_1 \ddot{\vartheta} = M_\vartheta \\ J_2 \ddot{\alpha} - s m_2 (\dot{v} \sin(\alpha - \vartheta) - v \dot{\vartheta} \cos(\alpha - \vartheta)) = M_\alpha - \lambda_2 l^2 \dot{\alpha} \end{cases}$$

dove $F_\tau = X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta$.

Mentre, come è naturale, la (3) è identicamente soddisfatta, l'equazione (9) diventa:

$$(13) \quad v |\sin(\alpha - \vartheta)| - l |\dot{\alpha}| = 0.$$

Possiamo ora, nelle (12), eliminare λ_2 , moltiplicando la prima di tali equazioni per v , la seconda per $\dot{\alpha}$ e sommando membro a membro. Otteniamo così:

$$\begin{aligned} m v \dot{v} + J_2 \dot{\alpha} \ddot{\alpha} - (\alpha - \vartheta) s m_2 v \dot{\alpha} \cos(\alpha - \vartheta) - \\ - (v \ddot{\alpha} + \dot{v} \dot{\alpha}) s m_2 \sin(\alpha - \vartheta) = v F_\tau + \dot{\alpha} M_\alpha, \end{aligned}$$

la quale si può scrivere anche:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\alpha}^2 - s m_2 v \dot{\alpha} \sin(\alpha - \vartheta) \right] = v F_\tau + \dot{\alpha} M_\alpha.$$

In definitiva le equazioni del moto del sistema meccanico in esame assumono la forma:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\alpha}^2 - s m_2 v \dot{\alpha} \sin(\alpha - \vartheta) \right] = v F_\tau + \dot{\alpha} M_\alpha \\ J_1 \ddot{\vartheta} = M_\vartheta \\ v |\sin(\alpha - \vartheta)| - l |\dot{\alpha}| = 0. \end{cases}$$

Se le forze attive sono tutte nulle si ricava:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\alpha}^2 - s m_2 v \dot{\alpha} \sin(\alpha - \vartheta) = cost \\ \dot{\vartheta} = cost \\ v |\sin(\alpha - \vartheta)| - l |\dot{\alpha}| = 0. \end{cases}$$

La prima relazione traduce evidentemente l'integrale dell'energia (qui tutta cinetica). Nel primo membro non compare il termine $\frac{1}{2} J_1 \dot{\vartheta}^2$, concepibile peraltro conglobato, come costante, nella costante a secondo membro.

Esaminiamo ora, in queste ipotesi, i due casi particolari seguenti:

I) Sia

$$\varphi = \pi \quad \text{ossia} \quad \vartheta = \pi + \alpha, \quad m_1 = 0, \quad J_1 = 0$$

e quindi

$$m_2 = m, \quad J_2 = J.$$

Le equazioni (15) del moto diventano;

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 = E = \text{cost} \\ \dot{\alpha} = \dot{\vartheta} = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} v = \pm \sqrt{\frac{2 E}{m}} \\ \alpha = \text{cost.} \end{cases}$$

Si ottiene dunque un pattino con due punti d'appoggio allineati, il quale ovviamente si muove di moto rettilineo uniforme nella direzione $\alpha = \text{cost.}$

II) Supponiamo introdotto l'ulteriore vincolo olonomo:

$$\vartheta = 0$$

traducente la circostanza fisica che il pattino di guida sia obbligato a percorrere una traiettoria rettilinea.

Dalle (15) si ottiene:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\alpha}^2 - s m_2 \dot{\alpha} \sin \alpha = E \\ v |\sin \alpha| - l |\dot{\alpha}| = 0, \end{cases}$$

dove E è ora l'esatta energia cinetica totale del sistema.

Al fine di dare alle (16) una forma più espressiva, in vista delle considerazioni che faremo in seguito, ci conviene introdurre l'angolo φ che la direzione della *guida* forma con quella del traino. Notando che è:

$$\varphi = 2\pi + \alpha,$$

le (16) diventano:

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 - s m_2 v \dot{\varphi} \sin \varphi = E \\ v |\sin \varphi| - l |\dot{\varphi}| = 0. \end{cases}$$

Osserviamo subito che nella seconda delle (17) si può prescindere dai valori assoluti. Facciamo vedere infatti che l'unica possibilità che si presenta per i segni di $\dot{\varphi}$ e di $\sin \varphi$ è che sia sempre:

$$\dot{\varphi} \sin \varphi > 0.$$

Supposto invero dapprima che in un istante t , assunto come iniziale, sia $0 < \varphi < \pi$, in un successivo intervallo di tempo infinitesimo dt il punto P di contatto del pattino guidato si porterà, spostandosi nella direzione del pattino stesso, in una posizione P' infinitamente vicina a P , mentre il punto A , muovendosi nella direzione dell'asse x , si porterà nella posizione A' infinitamente vicina ad A . Dall'esame del triangolo $P' A A'$ [fig. 2] e da note relazioni tra angoli si vede subito che l'angolo interno in A — determinazione iniziale di φ — è minore dell'angolo esterno in A' — determinazione finale di φ —.

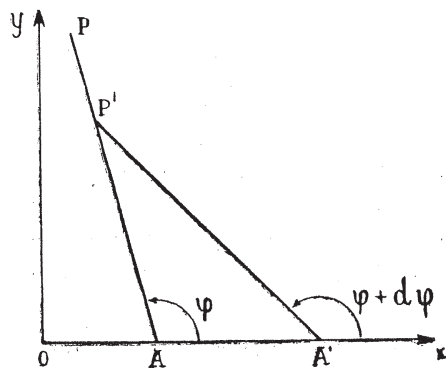


Fig. 2

L'incremento $d\varphi$ subito dall'angolo φ nell'intervallo dt è dunque certamente maggiore di zero. I segni di $\dot{\varphi}$ e di $\sin \varphi$ sono pertanto entrambi positivi. Analogamente si verifica che

partendo da un valore di φ compreso fra π e 2π , l'incremento subito da tale angolo, in uno spostamento infinitesimo di tutto il sistema, è minore di zero; nel qual caso $\dot{\varphi}$ e $\text{sen } \varphi$ risultano entrambi negativi.

Omesso ormai il segno di modulo, scrivendo:

$$v \text{ sen } \varphi - l \dot{\varphi} = 0,$$

possiamo di qui ricavare l'espressione di v e sostituirla nella prima delle (17). Otteniamo così:

$$v = \frac{l \dot{\varphi}}{\text{sen } \varphi}, \quad \frac{1}{2} m \frac{l^2 \dot{\varphi}^2}{\text{sen}^2 \varphi} + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 - s m_2 l \dot{\varphi}^2 = E$$

da cui:

$$(18) \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{2 E \text{sen}^2 \varphi}{m l^2 + (J_2 - 2 s m_2 l) \text{sen}^2 \varphi}.$$

Ponendo

$$f(\varphi) = \frac{2 E \text{sen}^2 \varphi}{m l^2 + (J_2 - 2 s m_2 l) \text{sen}^2 \varphi}$$

si ha:

$$(19) \quad \dot{\varphi} = \pm \sqrt{f(\varphi)}$$

dove il segno va sempre preso in modo che sia $\dot{\varphi} \text{ sen } \varphi > 0$. In altri termini va preso in (19) il segno $+$ se è $0 < \varphi < \pi$, il segno $-$ se è $\pi < \varphi < 2\pi$. Volendo studiare l'andamento della funzione $f(\varphi)$ per $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, giova anzitutto osservare che il suo denominatore è sempre positivo (*) e finito. Essa quindi si annulla soltanto per $\text{sen } \varphi = 0$, ossia per $\varphi = 0$ e $\varphi = \pm \pi$.

(*) Basta a tale scopo dimostrare che il discriminante Δ dell'equazione in l

$$F(l) = m l^2 - 2 s m_2 \text{sen}^2 \varphi l + J_2 \text{sen}^2 \varphi = 0$$

è sempre minore di zero. Si ha infatti, denotando con q il raggio d'inerzia del traino attorno ad A :

$$\Delta = \text{sen}^2 \varphi (s^2 m_2^2 \text{sen}^2 \varphi - m J_2) < (s^2 m^2 - m J_2) = m (s^2 m - m_2 q^2) < m^2 (s^2 - q^2) < 0,$$

l'ultima disuguaglianza risultando da note proprietà meccaniche elementari.

Poichè:

$$\begin{aligned} [f'(\varphi)]_{\varphi=0} &= 0, & [f'(\varphi)]_{\varphi=\pm\pi} &= 0 \\ [f''(\varphi)]_{\varphi=0} &= \frac{4E}{m l^2}, & [f''(\varphi)]_{\varphi=\pm\pi} &= \frac{4E}{m l^2}, \end{aligned}$$

le due determinazioni $\varphi = 0$ e $\varphi = \pm\pi$ sono radici doppie per $f(\varphi) = 0$.

Possiamo concludere che se inizialmente è $\varphi = 0$ o $\varphi = \pm\pi$, il valore di φ si mantiene tale durante tutto il moto. Nel caso che inizialmente sia $\varphi \neq \begin{cases} 0 \\ \pm\pi \end{cases}$, il pattino trainato tende invece ad allinearsi con la guida, assumendo valori di φ convergenti a $\pm\pi$. Si può infine notare che, in corrispondenza dei valori $\varphi = \frac{\pi}{2}$

o $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, la funzione $f(\varphi)$

$\equiv \dot{\varphi}^2$ presenta un massimo.

Tutte le circostanze ora

esposte appaiono chiaramente dall'esame dei grafici fig. 3: in fig. 3 a è stata rappresentata la traiettoria del punto P di contatto del pattino trainato; in fig. 3 b è stato rappresentato il corrispondente andamento di $\dot{\varphi}^2$ in funzione di φ .

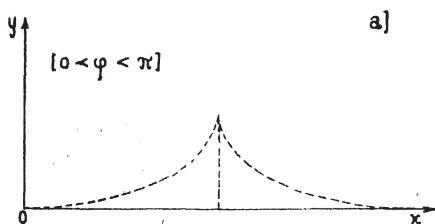


Fig. 3 a

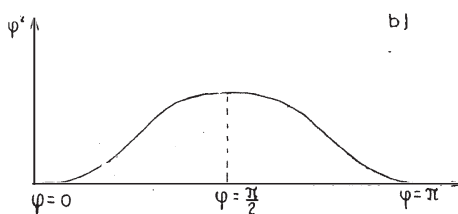


Fig. 3 b

2

R E N D I C O N T I
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

ANTONIO MELIS

Su una classe di moti piani non stazionari di fluidi
comprimibili con linee di flusso permanenti

(Estratto dal fasc. 1 - 2 Vol. XXVIII 1958)

CELT - CAGLIARI

Su una classe di moti piani non stazionari di fluidi comprimibili con linee di flusso permanenti.

Nota (*) di ANTONIO MELIS

SUNTO: *Si studiano, col metodo delle perturbazioni, moti non stazionari poco accelerati con linee di flusso invarianti al trascorrere del tempo e si esaminano alcuni casi particolari.*

1. - Recentemente è stato studiato¹⁾ il moto piano irrotazionale non stazionario di un gas perfetto che, in condizioni isentropiche, mantiene invarianti le linee di flusso al trascorrere del tempo.

Un tale campo viene rappresentato da un potenziale di velocità del tipo:

$$\Phi(x, y; t) = f(t)\varphi(x, y)$$

dove il fattore temporale $f(t)$ ha la forma:

$$f(t) = \frac{1}{1 - \alpha t}$$

con α costante arbitraria.

Il potenziale « ridotto » di velocità $\varphi(x, y)$ deve soddisfare la equazione indefinita:

$$\begin{aligned} (1) \quad (c^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (c^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} = \\ = 2\alpha(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \alpha\varphi - \alpha_1) \end{aligned}$$

(*) Pervenuta alla Redazione il 27-5-58.

(¹) G. AYMERICH: *Moti non permanenti di un gas perfetto con linee di corrente invarianti*, Rend. Sem. Fac. di Scienze Un. Cagliari, fasc. 1-2, vol. XXVII, 1957

in cui c , velocità «ridotta» del suono nel mezzo considerato, deve pensarsi funzione di φ , φ_x e φ_y . Si ha:

$$(2) \quad \alpha\varphi + \frac{1}{2}u^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{u^{*2}}{2}$$

Ponendo nella (1) $\alpha=0$ si ottiene la ben nota equazione relativa al moto stazionario

$$(3) \quad \varphi_{xx}(c^2 - \varphi_x^2) - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (c^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} = 0$$

dove

$$(4) \quad c^2 = \frac{\gamma-1}{2}(u^{*2} - u^2).$$

2. - Data la difficoltà che presenta lo studio della equazione (1), può avere un certo interesse esaminare le sue soluzioni prossime a quelle della (3), il che significa studiare i moti del tipo indicato ottenuti perturbando di poco una corrente stazionaria.

D'ora in avanti intenderemo dunque α come infinitesimo, trascurabili i termini d'ordine superiore, e scriveremo:

$$(5) \quad \varphi = \varphi_0 + \alpha\psi$$

dove φ_0 rappresenta una generica soluzione della (3) e ψ indica il potenziale ridotto della perturbazione.

Sostituendo nella equazione (1) alla funzione $\varphi(x, y)$ la sua espressione approssimata (5) e trascurando i termini d'ordine superiore al primo, si ottiene

$$(1') \quad \begin{aligned} & (c^2 - \varphi_{0x}^2)\varphi_{0xx} + \alpha(c^2 - \varphi_{0x}^2)\psi_{xx} - 2\alpha\varphi_{0x}\varphi_{0xx}\psi_x + \\ & + (c^2 - \varphi_{0y}^2)\varphi_{0yy} + \alpha(c^2 - \varphi_{0y}^2)\psi_{yy} - 2\alpha\varphi_{0y}\varphi_{0yy}\psi_y + \\ & - 2\varphi_{0x}\varphi_{0y}\varphi_{0xy} - 2\alpha\varphi_{0x}\varphi_{0xy}\psi_y - 2\alpha\varphi_{0y}\varphi_{0xy}\psi_x - \\ & - 2\alpha\varphi_{0x}\varphi_{0y}\psi_{xy} = 2\alpha(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2 - \alpha_1). \end{aligned}$$

Ma per la (2) si ha:

$$c^2 = \frac{\gamma-1}{2}(u^{*2} - 2\alpha\varphi - \varphi_x^2 - \varphi_y^2)$$

e quindi, trascurando anche qui tutti i termini infinitesimi d'ordine superiore al primo, si può scrivere:

$$c^2 = c_0^2 - \alpha(\gamma - 1)(\varphi_0 + \varphi_{0x}\psi_x + \varphi_{0\nu}\psi_\nu).$$

Tenendo conto della (3), della (4) e sostituendo l'espressione di c^2 nella (1') si ricava:

$$\begin{aligned} (6) \quad & (c_0^2 - \varphi_{0x}^2)\psi_{xx} + (c_0^2 - \varphi_{0\nu}^2)\psi_{\nu\nu} - 2\varphi_{0x}\varphi_{0\nu}\psi_{x\nu} = \\ & [(\gamma + 1)\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + (\gamma - 1)\varphi_{0x}\varphi_{0\nu\nu} + 2\varphi_{0\nu}\varphi_{0x\nu}]\psi_x + \\ & + [(\gamma + 1)\varphi_{0\nu}\varphi_{0\nu\nu} + (\gamma - 1)\varphi_{0\nu}\varphi_{0xx} + 2\varphi_{0x}\varphi_{0x\nu}]\psi_\nu + \\ & + (\gamma - 1)\varphi_0(\varphi_{0xx} + \varphi_{0\nu\nu}) + 2(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0\nu}^2 - \alpha_1). \end{aligned}$$

Questa che ho scritto è dunque l'equazione indefinita che deve essere soddisfatta dal potenziale « ridotto » della perturbazione. Essa è di tipo ellittico, parabolico od iperbolico a seconda che il « moto base » sia subsonico, sonico o supersonico.

Ottenuta la $\psi(x, y)$, il potenziale di velocità $\Phi(x, y; t)$ del campo si ottiene moltiplicando la (5) per il fattore temporale $\frac{1}{1 - \alpha t}$. Esso si può scrivere evidentemente nella forma:

$$(5') \quad \Phi(x, y; t) = \varphi_0 + \alpha\psi + \frac{\alpha t}{1 - \alpha t}(\varphi_0 + \alpha\psi)$$

la quale è suscettibile della seguente interpretazione. Si può pensare che all'istante iniziale, ossia per $t = 0$, il potenziale di velocità sia ottenuto perturbando di poco quello di una corrente stazionaria. Naturalmente, al trascorrere del tempo, ci si discosta da questa in maniera tale, però, che nel campo del moto le linee di flusso permangono fisse.

Convien anche osservare, sebbene la cosa sia pressochè ovvia, che se $\alpha > 0$ l'approssimazione introdotta cessa di esser valida quando ci si avvicina all'istante $\bar{t} = \frac{1}{\alpha}$ mentre resta valida per qualsiasi valore di t positivo se $\alpha < 0$.

3. - Studiamo il caso particolare di una corrente piana ottenuta perturbando, all'istante iniziale, una corrente stazionaria uniforme con velocità V_0 parallela, ad esempio, alla direzione dell'asse x .

Si avrà allora:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= V_0 x & \varphi_{0x} &= V_0 & \varphi_{0y} &= 0 \\ \varphi_{0xx} &= \varphi_{0yy} = 0.\end{aligned}$$

Indichiamo poi con V_0^* la velocità limite relativa a tale corrente. Per il potenziale « ridotto » della perturbazione non stazionaria otterremo la equazione:

$$(6') \quad (c_0^2 - V_0^2)\psi_{xx} + c_0^2\psi_{yy} = 2(V_0^2 - \alpha_1)$$

in cui $\alpha_1 = \frac{V_0^{*2}}{2}$.

Osservato che in un tale campo la velocità del suono c_0 è costante, tale risulta anche il numero di Mach $M_0 = \frac{V_0}{c_0}$; la equazione (6'), che in maniera più espressiva scriveremo come segue:

$$(6'') \quad (1 - M_0^2)\psi_{xx} + \psi_{yy} = M_0^2 - \frac{2}{\gamma - 1}$$

è dunque una equazione differenziale del 2° ordine alle derivate parziali a coefficienti costanti.

Distinguiamo due casi:

I) la corrente stazionaria sia subsonica, ossia risulti $V_0 < c_0$.

Ponendo allora

$$1 - M_0^2 = \lambda^2; \quad M_0^2 - \frac{2}{\gamma - 1} = A$$

la (6''), che è di tipo ellittico, diviene:

$$(7) \quad \lambda^2\psi_{xx} + \psi_{yy} = A.$$

Mediante la sostituzione di funzione

$$\psi_1(x, y) = \psi(x, y) - \frac{A}{2\lambda^2}x^2$$

la (7) diventa

$$\lambda^2\psi_{1xx} + \psi_{1yy} = 0$$

che è la cosiddetta equazione di PRANDTL.

Col cambiamento di variabili definito da:

$$x = x' \quad y = \frac{y'}{\lambda}$$

essa si trasforma nella equazione di LAPLACE:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y'^2} = 0.$$

Ossia la funzione $\psi_1(x, y)$ è armonica in tutto il campo. Il potenziale di velocità della corrente perturbata sarà quindi:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y; t) = V_0 x + \alpha \left\{ \psi_1(x, \sqrt{1 - M_0^2} y) + \frac{M_0^2 - \frac{2}{\gamma - 1}}{2(1 - M_0^2)} x^2 \right\} + \\ + \frac{\alpha t}{1 - \alpha t} \left\{ V_0 x + \alpha \left[\psi_1(x, \sqrt{1 - M_0^2} y) + \frac{M_0^2 - \frac{2}{\gamma - 1}}{2(1 - M_0^2)} x^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

II) la corrente stazionaria uniforme si supersonica, ossia pensiamo $V_0 > c_0$.

Posto allora

$$M_0^2 - 1 = \mu^2; \quad \frac{\frac{2}{\gamma - 1} - M_0^2}{M_0^2 - 1} = a$$

la equazione (6'') assume la forma, introducendo la nuova funzione $\psi_1(x, y) = \phi(x, y) - \frac{a}{2} x^2$:

$$(8) \quad \mu^2 \phi_{1xx} - \phi_{1yy} = 0$$

che è la ben nota equazione dell'onda di D'ALEMBERT, il cui integrale generale è:

$$\phi_1(x, y) = f(x - \mu y) + g(x + \mu y)$$

dove f e g sono funzioni del tutto arbitrarie.

Il potenziale « ridotto » della velocità di perturbazione sarà:

$$\psi(x, y) = f(x - \sqrt{M_0^2 - 1} y) + g(x + \sqrt{M_0^2 - 1} y) + \frac{\frac{2}{\gamma - 1} - M_0^2}{2(M_0^2 - 1)} x^2$$

e quindi, in virtù della (5'), il potenziale di velocità della corrente non stazionaria sarà:

$$\Phi(x, y; t) = \frac{1}{1 - \alpha t} \left\{ V_0 x + \alpha \left[f(x - \mu y) + g(x + \mu y) + \frac{\frac{2}{\gamma - 1} - M_0^2}{2(M_0^2 - 1)} x^2 \right] \right\}.$$

È chiaro che, in generale, le linee di corrente nel campo perturbato non sono più parallele all'asse x .

4. - Analogamente a quanto è stato fatto nel paragrafo 3, vogliamo studiare la corrente leggermente accelerata che si può pensare ottenuta perturbando un campo piano di moto stazionario il cui potenziale di velocità è rappresentato dalla funzione:

$$\varphi_0(x, y) = k \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad (2)$$

Si tratta quindi di assumere come «moto base» quello consistente in una corrente piana circolatoria, con velocità angolare data da kr^{-2} (r stando ad indicare la distanza del generico punto P del campo della origine del sistema di riferimento).

Per le componenti della velocità si hanno le espressioni:

$$u_0 = \frac{ky}{r^2}, \quad v_0 = -\frac{kx}{r^2};$$

pertanto l'equazione differenziale relativa al potenziale della perturbazione si scrive così:

$$(9) \quad \left[c_0^2 - \frac{k^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \phi_{xx} + \left[c_0^2 - \frac{k^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \phi_{yy} + \frac{2k^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \phi_{xy} = \\ = -\frac{2k^2}{(x^2 + y^2)^2} (x\phi_x + y\phi_y) + 2 \left(\frac{k^2}{x^2 + y^2} - \alpha_1 \right).$$

Qui la velocità del suono c_0 nel campo stazionario, per via del teo-

2) COURANT-FRIEDRICHS: *Supersonic flow and shock waves*, New York, 1948.

rema di BERNOULLI, dipenderà da x ed y secondo l'espressione:

$$(10) \quad c_0^2 = \frac{\gamma - 1}{2} \left(q_0^{*2} - \frac{k^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Nella classe di soluzioni della equazione (9) vogliamo fra tutte esaminare quelle dipendenti soltanto dalla variabile r ; nel qual caso la (9) assume la forma:

$$(9') \quad c_0^2 \left(\psi'' + \frac{1}{r} \psi' \right) + \frac{k^2}{r^3} \psi' = 2 \left(\frac{k^2}{r^2} - \alpha_1 \right)$$

dove gli apici denotano derivazioni rispetto ad r .

In virtù della (10) e ponendo $\gamma = 7/5$, come è lecito se il fluido che si considera è l'aria, l'equazione (9') diventa:

$$\frac{d\psi'}{dr} = \frac{q_0^{*2} r^2 + 4k^2}{r(k^2 - q_0^{*2} r^2)} \psi' + \frac{5(q_0^{*2} r - 2k^2)}{k^2 - q_0^{*2} r^2}.$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del 1° ordine nella funzione incognita ψ' . Il suo integrale generale è:

$$\begin{aligned} \psi' = & \frac{k^2 q_0^{*3} r^4}{(q_0^{*2} r^2 - k^2)^{5/2}} \left[\frac{35}{2} \log(q_0^{*} r + \sqrt{q_0^{*2} r^2 - k^2}) + \right. \\ & \left. - 15 \frac{\sqrt{q_0^{*2} r^2 - k^2}}{q_0^{*} r} - \frac{10}{3} \frac{(q_0^{*2} r^2 - k^2)^{3/2}}{q_0^{*3} r^3} - \frac{5}{2} \frac{q_0^{*} r \sqrt{q_0^{*2} r^2 - k^2}}{k^2} + C \right]. \end{aligned}$$

Possiamo ora, senza procedere nella integrazione della espressione trovata, fare alcune considerazioni di carattere puramente qualitativo che valgano a descrivere, almeno sommariamente, il campo del moto perturbato.

In forza della (5) del paragrafo 1 la velocità di ogni singola particella fluida sarà data dalla somma di due componenti: il termine φ_0 , dipendente soltanto dal rapporto x/y , dà luogo infatti ad una componente trasversa della velocità, mentre il termine ψ , dipendente solo da r , genera una componente radiale la cui espressione, a meno di un fattore puramente temporale, è data da ψ' .

Mentre la componente trasversa, data da $\frac{1}{1 - \alpha t} \frac{k}{r}$, decresce in modulo al crescere di r fino ad annullarsi per $r \rightarrow \infty$, la componente radiale per $r \rightarrow \infty$ tende a $-\infty$.

Essa è reale soltanto per $r > \frac{k}{q_0^*}$ e per r tendente a questo valore tende a $+\infty$ ovvero a $-\infty$ a seconda che la costante C sia positiva o negativa.

Si può quindi affermare che, quando ad es. $C > 0$, esiste almeno un valore r per cui ψ' si annulla. Ciò significa che sulla circonferenza di raggio r le particelle fluide hanno velocità tutta trasversa, mentre quelle che si trovano in prossimità di tale circonferenza *si avvicinano* a questa percorrendo una traiettoria a spirale.

Niente invece si può dire di ciò che avviene nelle zone in cui ψ' assume valori molto grandi: per tali valori infatti viene meno il procedimento di approssimazione fino a qui seguito.

Si può pensare di interpretare quanto detto immaginando una corrente circolatoria uniforme che inizialmente lambisca le pareti di un cilindro di raggio r che, in un certo istante, venga bruscamente sfilato. Si manifesta allora un moto del fluido che, presumibilmente, è analogo a quello descritto.

RENDICONTI
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

A. MELIS

A proposito di una proprietà del rotore
di un campo vettoriale

(Estratto dal fasc. 1 Vol. XXX 1960)

BOLOGNA
Cooperativa Tipografica Azzoguidi
1961

A proposito di una proprietà del rotore di un campo vettoriale

Nota (*) di A. MELIS

SUNTO: Vedi n. 1.

1. - Il prof. ZEULI¹⁾ ha indicato una notevole proprietà variazionale che consente di individuare, per un campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z)$, le linee γ per cui il lavoro di $\mathbf{F}$ è stazionario. Tali linee sono tutte e sole le linee di flusso del vettore $\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{F}$, ossia le linee vorticosi di detto campo vettoriale.

Non si fa cenno però, nella nota citata, circa la natura di tale stazionarietà, resta cioè imprecisato se il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la detta linea γ congiungente due punti P_1 e P_2 del campo sia minimo o massimo rispetto a quelli relativi a linee γ' , prossime quanto si vuole alla γ ed aventi pur esse gli estremi in P_1 e P_2 . Voglio qui completare il risultato mostrando, mediante una semplice osservazione di carattere geometrico, come si può affermare senz'altro che il lavoro di un vettore $\mathbf{F}$ posizionale lungo una linea di $\text{rot } \mathbf{F}$, pur presentando carattere di stazionarietà, non è né minimo né massimo.

2. - Essendo $\mathbf{F}$ un vettore funzione del posto e γ una linea del campo C di definizione di $\mathbf{F}$, congiungente due punti P_1 e P_2 , considero l'integrale:

$$\mathfrak{I} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \times d\mathbf{P}$$

(*) Pervenuta alla Redazione il 25-10-60.

¹⁾ T. ZEULI: « Su di una notevole proprietà del rotore di un campo vettoriale » Rend. Sem. Matem. Univ. Politec. Torino Vol. 8°, 1947-49.

Detta γ' un'altra linea di C avente gli stessi estremi P_1 e P_2 ed indicato con Γ il ciclo chiuso composto da $\gamma' + \gamma$ percorso nel verso

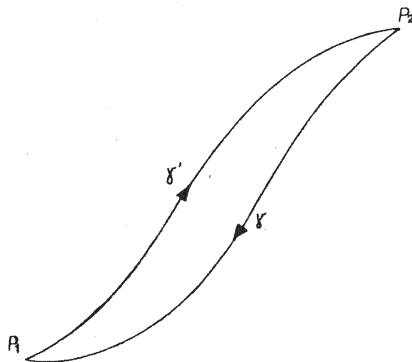


Fig. 1

segnato in fig. 1, posso scrivere:

$$\Delta \mathcal{J} = \int_{\gamma'} \mathbf{F} \times d\mathbf{P} - \int_{\gamma} \mathbf{F} \times d\mathbf{P} = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \times d\mathbf{P};$$

ossia, indicata con Σ una qualunque superficie che ha Γ per contorno e con $\mathbf{n}$ la normale a Σ in un suo punto generico, per il teorema di STOKES:

$$\Delta \mathcal{J} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{F} \times \mathbf{n} d\Sigma$$

Tale è la differenza dei valori che si ottengono quando $\mathcal{J}$ viene calcolato lungo la linea γ' e lungo la linea γ .

Si noterà a questo punto che, per calcolare la variazione prima dell'integrale $\mathcal{J}$, la linea γ' si dovrà pensare come luogo di punti estremi di vettori infinitesimi δP spiccati a partire dai punti P della linea γ e che la superficie Σ andrà realizzata mediante la striscia il cui elemento di area è dato dal modulo del vettore $\delta P \wedge dP$, onde

$$\mathbf{n} d\Sigma = \delta P \wedge dP$$

Infine le determinazioni di $\text{rot } \mathbf{F}$ andranno prese su γ , e pertanto

$$\delta \mathcal{J} = \int_{P_1}^{P_2} \text{rot } \mathbf{F} \times \delta P \wedge dP = - \int_{P_1}^{P_2} (\text{rot } \mathbf{F} \wedge dP) \times \delta P$$

da cui il risultato citato al n. 1.

3. - Venendo ora alla affermazione della fine del n. 1, considero la superficie $\mathfrak{F}$ di un sottile tubo di flusso del vettore $\mathbf{w}$, avvolgente γ e terminata a due basi contenenti P_1 e P_2 .

Supposto $\mathbf{w}$ regolare (diverso da zero) in tutto l'interno S di tale superficie, scelgo su γ verso concorde con quello di $\mathbf{w}$. Faccio vedere che su $\mathfrak{F}$ si possono tracciare due linee, γ_1 e γ_2 , aventi gli estremi in P_1 e P_2 , tali che la differenza $\Delta_1 \mathfrak{F}$ fra le determinazioni di $\mathfrak{F}$ relative a γ_1 e γ è di segno opposto alla analoga differenza $\Delta_2 \mathfrak{F}$ relativa a γ_2 e γ . Basta

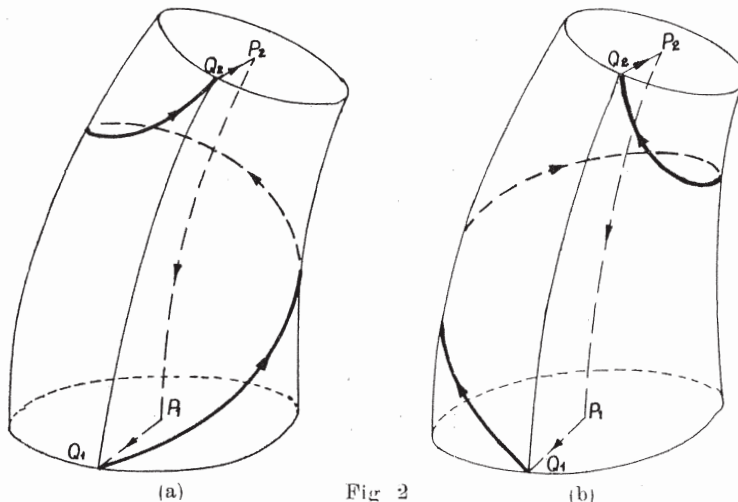


Fig. 2

per questo pensare la linea γ_1 costituita (fig. 2-a) dal trattino rettilineo P_1Q_1 , dalla spirale Q_1Q_2 che si avvolge per una sola volta in senso antiorario intorno ad S (Q_1 e Q_2 appartenenti ad una medesima linea di campo di $\mathbf{w}$) e dal tratto rettilineo Q_2P_2 . La superficie Σ attraverso cui si deve ora calcolare il flusso del vettore $\mathbf{w}$ non è altro che una sezione di S di tipo elicoidale appoggiata alla spirale Q_1Q_2 ed al tratto di chiusura Q_2Q_1 formato dalla nominata linea di campo di $\mathbf{w}$.

Come γ_2 (fig. 2-b) basterà assumere la linea costituita ancora dai tratti rettilinei P_1Q_1 e Q_2P_2 e dall'elica, situata su $\mathfrak{F}$, congiungente Q_1 e Q_2 ed avvolgentesi ora una sola volta in senso orario intorno ad S . Evidentemente il valore del flusso del vettore $\mathbf{w}$ attraverso la superficie dell'elicoide che similmente così si genera è opposto a quello ottenuto nel primo caso.

Pertanto è sempre possibile costruire due linee γ_1 e γ_2 , relativamente alle quali l'incremento $\Delta \mathfrak{F}$ ha segno opposto e si può così concludere che il valore di $\mathfrak{F}$ valutato lungo la linea γ estrema non è nè minimo nè massimo.

ANTONIO MELIS

L'AUTOCONFINAMENTO
DI UNA COLONNA DI PLASMA
IN REGIME ADIABATICO

TORINO
ACCADEMIA DELLE SCIENZE
1962

L'autoconfinamento di una colonna di plasma in regime adiabatico (*).

Nota di ANTONIO MELIS
presentata dal Socio corrisp. Dario GRAFFI
nell'adunanza dell'11 Aprile 1962

Riassunto. — *Vedi n. 1.*

1. In un lavoro del 1934 Bennett ⁽¹⁾ ha studiato, seguendo i metodi della meccanica statistica, il confinamento di una colonna di gas completamente ionizzato in movimento, presupponendo il fenomeno isoterma e mostrando conseguentemente quale è la legge di distribuzione delle particelle cariche in funzione della loro distanza dall'asse di simmetria della colonna stessa. Sempre nell'ipotesi di isoterma del fenomeno, Aymerich ⁽²⁾ ha ripreso lo stesso problema, trattandolo con i metodi suggeriti dalla magnetoaerodinamica, dandone una soluzione esplicita e mostrando come quella di Bennett non è che una delle possibili configurazioni secondo cui può disporsi il plasma.

Mi è parso pertanto utile riesaminare la questione, adottando però l'ipotesi che l'evoluzione termodinamica del fenomeno sia retta da una equazione politropica. Tale schematizzazione matematica evidentemente comprende, come casi particolari, sia quella adottata dagli Autori su menzionati, sia quella corrispondente all'ipotesi di adiabaticità del fenomeno,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca N° 4 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(1) BENNETT, *Phys. Rev.*, 45 (1934).

(2) G. AYMERICH, *Sull'autoconfinamento magnetico del plasma*, (Rend. Sem. Fac. Scienze Univ. Cagliari, XXX, Fasc. 1-2, 1960).

ipotesi ormai prospettata da diversi Autori (3) come più rispondente alla situazione fisica studiata. Sono pervenuto così a riconoscere, in tali ipotesi più generali, che le possibili distribuzioni della densità sono qualitativamente analoghe a quelle trovate da Aymerich; inoltre ho indicato un metodo per la ricerca delle soluzioni approssimate del problema.

2. Si consideri un gas completamente ionizzato (plasma) le cui particelle cariche, che si muovono tutte lungo una stessa direzione con velocità costante, siano distribuite con simmetria cilindrica rispetto ad un asse: questo significa che la densità numerica delle particelle stesse deve ritenersi dipendente soltanto dalla distanza r dall'asse. Si indicherà con n_1 la densità numerica degli elettroni di carica $-e$ e di massa m_1 , con n_2 la densità numerica degli ioni, che supporremo tutti di un solo tipo, di carica Ze e di massa m_2 .

È ben noto (4) che se non si tiene conto, come è lecito, delle forze di massa di natura non elettromagnetica e se si suppone che sia trascurabile l'effetto degli urti tra cariche di nome diverso, le equazioni che traducono analiticamente la situazione stazionaria sono le seguenti:

$$(1) \quad -\frac{dp_1}{dr} - en_1(E - v_1B) = 0.$$

$$(2) \quad -\frac{dp_2}{dr} + Zen_2(E - v_2B) = 0.$$

$$(3) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB) = \mu_0 (-en_1v_1 + Zen_2v_2).$$

$$(4) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE) = \frac{1}{\epsilon_0} (-en_1 + Zen_2).$$

(3) L. SPITZER, *Physics of fully ionized gases*, (London, 1956); J. L. DELCROIX, *Introduction à la théorie des gaz ionisés*, (Paris, 1959); B. LEHNERT, *Magnetohydrodynamic Waves in the Ionosphere and their Application to Giant Pulsation*, (Tellus, VIII, 1956).

(4) SPITZER, *op. cit.*, pag. 42.

dove B è l'unica componente, quella trasversa, dell'induzione magnetica ed E rappresenta la componente radiale del campo elettrico, la sola diversa da zero.

Alle quattro equazioni ora scritte si aggiungono le due relazioni che esprimono, in termini finiti, il legame fra la pressione e la densità delle particelle e che noi, come detto in principio, assumiamo della forma:

$$(5) \quad p_1 = k_1 (m_1 n_1)^\gamma$$

$$(6) \quad p_2 = k_2 (m_2 n_2)^\gamma.$$

Il valore, per ora indeterminato, dell'esponente γ che in queste compare si penserà nel seguito soddisfacente la limitazione $1 \leq \gamma \leq 2$: con questa condizione si comprende nella presente trattazione il caso in cui l'evoluzione termodinamica sia ritenuta adiabatica.

Le equazioni (1), (2), (3), (4), insieme con (5) e (6), sono sufficienti per descrivere il fenomeno.

3. Introdotta la pressione globale $p = p_1 + p_2$, si osservi che se si utilizza la proprietà di quasi neutralità del plasma, per cui $\frac{Zn_2 - n_1}{n_1} \ll 1$, può porsi: $Zn_2 \simeq n_1 = n$ e pertanto si può scrivere:

$$p = \left[k_1 m_1^\gamma + k_2 \left(\frac{m_2}{Z} \right)^\gamma \right] n^\gamma.$$

In virtù di ciò, dalle (1) e (2) sommando membro a membro si ottiene:

$$(7) \quad \left[k_1 m_1^\gamma + k_2 \left(\frac{m_2}{Z} \right)^\gamma \right] \frac{dn^\gamma}{dr} - enBV = 0.$$

dove la quantità V ora introdotta indica la velocità $v_1 - v_2$ degli elettroni rispetto agli ioni positivi. Tale velocità deve ritenersi costante, perchè così sono state supposte v_1 e v_2 .

*

Osservato che la (3), nell'ordine di approssimazione in cui ci si è posti, può scriversi:

$$(3') \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB) = \mu_0 eVn.$$

si può eliminare B dalla (7) mediante la (3'), e pervenire così all'equazione:

$$(8) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{n} \frac{dn}{dr} \right) + Ln = 0.$$

in cui

$$L = \frac{\mu_0 e^2 V^2}{k_1 m_1^\gamma + k_2 \left(\frac{m_2}{Z} \right)^\gamma}.$$

La (8) è una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine nell'unica funzione incognita $n(r)$, non lineare.

Pensando poi assegnato il numero N degli elettroni che si trovano in ogni istante dentro un tronco di colonna di altezza unitaria, dovrà essere rispettata la condizione globale:

$$\int_0^\infty 2\pi r n dr = N.$$

4. La equazione (8) presenta una forte analogia con la equazione di Emden relativa all'equilibrio di una sfera gassosa, di cui Sansone (5) ha studiato in dettaglio le soluzioni. In conformità col metodo indicato da questo Autore, posto $\gamma = 1 + \frac{1}{m}$ (con $m \geq 1$ se, come si è supposto, $1 \leq \gamma \leq 2$) ed introdotta la nuova funzione incognita $\Phi(r)$ legata alla n dalla relazione

$$n = \left(\frac{\Phi}{m + 1} \right)^m$$

(5) Vedi G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Parte II, (Bologna, 1941, pag. 338).

la (8) si trasforma nell'altra:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + a^2\Phi^m = 0.$$

in cui $a^2 = \frac{L}{(m+1)^m}$.

Infine con il cambiamento $r = \frac{\xi}{a}$ e ponendo $\Phi\left(\frac{\xi}{a}\right) = \vartheta(\xi)$ si ottiene la equazione:

$$(9) \quad \frac{d^2\vartheta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\vartheta}{d\xi} + \vartheta^m = 0.$$

Il problema del confinamento del plasma secondo le modalità esposte all'inizio di questa nota si traduce pertanto in quello di mostrare che esistono soluzioni della (9) dei due tipi seguenti:

1) soluzioni che hanno due zeri distinti ξ_0 e ξ_1 positivi e che sono limitate e positive nell'intervallo $(\xi_0 < \xi < \xi_1)$;

2) soluzioni che hanno uno zero positivo ξ_0 e che risultano limitate e positive nell'intervallo $(0 \leq \xi < \xi_0)$.

Si consideri pertanto l'ulteriore sostituzione:

$$\xi = e^{-t} \quad \vartheta = e^{\mu t} u$$

in cui $\mu = \frac{2}{m-1} > 0$, che trasforma la (9) come segue:

$$(9') \quad \frac{d^2u}{dt^2} + 2\mu \frac{du}{dt} + \mu^2 u + u^m = 0.$$

Ponendo poi $\frac{du}{dt} = v$ si ottiene il sistema normale equivalente:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -2\mu v - \mu^2 u - u^m. \end{cases}$$

del quale si vogliono ora studiare le soluzioni. Si capisce infatti come dal comportamento di queste si possano ricavare elementi atti a stabilire l'andamento di quelle dell'equazione (9).

Si osservi innanzitutto che poichè m è reale, deve essere $u(t) \geq 0$ affinchè risulti $\vartheta \geq 0$. Considerato allora il semipiano ($u \geq 0, v$) si pensi ivi tracciato il diagramma della curva γ di equazione:

$$2\mu v + \mu^2 u + u^m = 0$$

luogo dei punti in cui si annulla $\frac{dv}{dt}$. Il semipiano viene suddiviso dalla retta $v = 0$ e dalla curva γ , in tre zone distinte, come mostra la fig. 1, in ciascuna delle quali si presenta una delle circostanze sotto prospettate:

I zona ($u' > 0, v' < 0$)

II zona ($u' < 0, v' < 0$)

III zona ($u' < 0, v' > 0$).

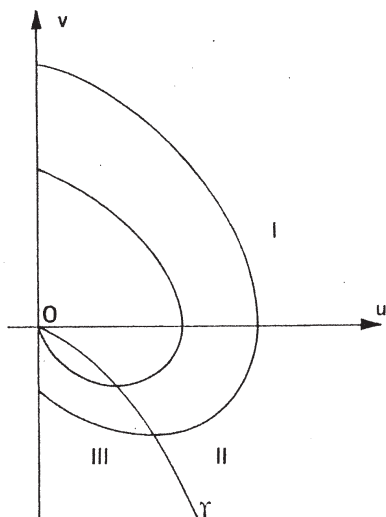


Fig. 1.

Si può pertanto vedere, sulla falsariga della dimostrazione data da Sansone, che una qualunque curva integrale del sistema (10)

$$u = u(t) \quad v = v(t)$$

soddisfacente la condizione

$$u(t_0) = 0 \quad v(t_0) > 0$$

passa dalla prima alla seconda regione e dalla seconda alla terza regione tagliando l'asse $v = 0$ e la curva γ in punti corrispondenti a valori finiti del parametro t . A seconda del loro comportamento nella terza zona le curve integrali di (10) possono distinguersi in due tipi:

1° tipo: le curve che tagliano il semiasse delle v negative in punti, regolari per (10), corrispondenti a valori finiti del parametro t ;

2° tipo: le altre per le quali risulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0.$$

Ci si può d'altronde assicurare che effettivamente esistono curve integrali passanti per l'origine, constatando che questa costituisce per il sistema (10) un punto singolare del tipo « *nodo attrattivo ad una tangente* » (6).

Considerato infatti il sistema lineare seguente, dedotto da (10):

$$(10') \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\mu^2 u - 2\mu v \end{cases}$$

si può facilmente constatare che esso possiede, nell'origine, una singolarità del tipo sopra detto. Pertanto le caratteristiche del sistema (10') appartengono tutte ad una stessa famiglia di curve aventi per tangente nell'origine la retta di equazione:

$$\mu u + v = 0 \quad (7).$$

Poichè infine è chiaro che è possibile trovare un $\alpha > 0$ tale che risulti:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u^m}{\rho^{1+\alpha}} = 0 \quad (\rho^2 = u^2 + v^2).$$

(basterà per questo prendere $0 < \alpha < m - 1$) si può concludere che l'origine è un nodo ad una tangente anche per il sistema non lineare (10).

(6) Vedi SANSONE-CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, (Cremonese-Roma). Pag. 272 e segg.

(7) Osservo che nel caso dell'equazione di EMDEN esaminato da SANSONE, l'origine è un nodo a due tangenti e pertanto vi è una caratteristica che giunge nell'origine con pendenza diversa da quella con cui vi pervengono tutte le altre.

5. Si è ora in grado di dare una descrizione abbastanza precisa delle curve integrali della equazione (9). Nota una soluzione di (10):

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

passante per il punto iniziale $u(t_0) = 0$, $v(t_0) = v_0$ la corrispondente soluzione della (9) sarà:

$$\vartheta(\xi) = \xi^{-\mu} u(t) \quad \text{con} \quad t = -\log \xi.$$

Esaminiamo il comportamento di $\vartheta(\xi)$ in corrispondenza a soluzioni di (10) del primo tipo.

Detta $\bar{t}$ la determinazione del parametro t successiva a t_0 per cui risulta $\vartheta(\bar{\xi}) = 0$, è chiaro che nell'intervallo $\xi < \bar{\xi} < \xi_0$ la funzione ϑ è diversa da zero, rimanendo ivi sempre positiva e finita: tali risultano infatti in detto intervallo sia il fattore $\xi^{-\mu}$ che la u .

Ciò significa, ricordando le relazioni che legano rispettivamente ξ con r e ϑ con n , che le particelle cariche si mantengono entro uno strato cilindrico di raggio interno $\bar{r} = \frac{\bar{\xi}}{a}$ e raggio esterno $r_0 = \frac{\xi_0}{a}$; dove n assume il valore massimo il campo magnetico H si annulla invertendo il verso e pertanto in seno al plasma si generano delle forze che dall'esterno lo spingono verso l'asse mentre dall'interno tendono ad allontanarlo ⁽⁸⁾.

Vogliamo ora esaminare il comportamento delle soluzioni dell'equazione (9) corrispondenti a quelle del secondo tipo del sistema (10).

Si può subito osservare che per $t \geq t_0$ risulta: $\frac{d\vartheta}{d\xi} \leq 0$. Si ricava infatti:

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = -e^{(\mu+1)t}(\mu u + v)$$

⁽⁸⁾ Vedi G. AYMERICH, *lavoro citato*.

e poichè le caratteristiche del secondo tipo del sistema (10) si mantengono tutte al di sopra della retta $\mu u + v = 0$ tangente nell'origine, il prodotto a secondo membro è certo non positivo: $\vartheta(\xi)$ è pertanto ovunque decrescente. Fisicamente ciò significa che la massima concentrazione di particelle si può avere soltanto sull'asse a differenza di quanto succede nel caso esaminato più sopra. Affinchè tale tipo di soluzione abbia significato fisico è però necessario mostrare che $\lim_{\xi \rightarrow 0} \vartheta(\xi)$ è finito.

La dimostrazione matematicamente rigorosa di ciò sembra presentare difficoltà di ordine piuttosto elevato. Per questo qui mi limito ad osservare che nei due casi estremi particolari per cui risulta $m = 1$ ovvero $m \rightarrow \infty$, il problema porge soluzioni del tipo richiesto.

Nel primo caso ($m = 1$) infatti la equazione (9) si riduce alla semplice equazione di Bessell di ordine zero la quale, come è noto, ammette soluzioni finite non nulle per $\xi = 0$.

Nel secondo caso ($m \rightarrow \infty$) si ricade invece nella ipotesi di isoterma del fenomeno già esaminata dagli Autori citati, per la quale sono state assegnate soluzioni finite per $\xi = 0$.

Per valori intermedi del parametro m indico, nel numero seguente, un metodo di risoluzione approssimato il quale, oltre a far presumere che esistano soluzioni del tipo cercato, può pensarsi anche come un procedimento atto alla valutazione numerica delle soluzioni del problema.

6. Riprendendo la equazione (9):

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) + \vartheta^m = 0.$$

si consideri, deducendola da essa, l'altra equazione:

$$(11) \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) + F_n(\vartheta) = 0.$$

dove $F_n(\vartheta)$ denota una funzione di ϑ il cui diagramma è una poligonale di n lati inscritta nella curva $F(\vartheta) = \vartheta^m$.

È facile vedere che, indipendentemente dal numero n dei lati della spezzata, è sempre possibile trovare soluzioni della (11) soddisfacenti le seguenti condizioni:

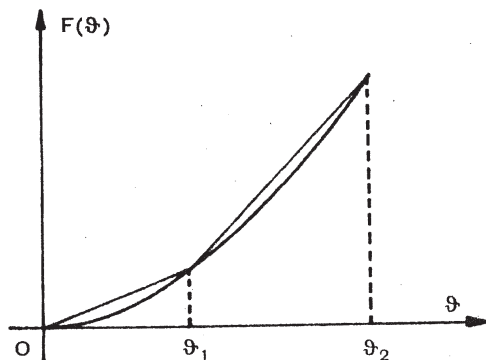


Fig. 2.

1) $\vartheta(0) = \vartheta_0 > 0$
e finita;

2) esiste un punto ξ_0 tale che nell'intervallo $(0 < \xi < \xi_0)$ risulta $\vartheta(\xi) > 0$ mentre $\vartheta(\xi_0) = 0$.

Questo fatto pertanto conduce a pensare che esista almeno una soluzione della

equazione (9), di cui quella di (11) deve ritenersi una approssimazione, la quale si comporti, per $\xi \rightarrow 0$, in maniera analoga.

Allo scopo di illustrare questo metodo di risoluzione approssimato, accenno di seguito ai due casi in cui $n = 2$ ed $n = 3$.

Per $n = 2$, la (11) porge (vedi fig. 2):

$$(I) \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) + \frac{\vartheta_0^m - \vartheta_I^m}{\vartheta_0 - \vartheta_I} \vartheta - \vartheta_0 \vartheta_I \frac{\vartheta_0^{m-1} - \vartheta_I^{m-1}}{\vartheta_0 - \vartheta_I} = 0$$

$$(12) \quad \text{per } \vartheta_I < \vartheta \leq \vartheta_0$$

$$(II) \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) + \vartheta_I^{m-1} \vartheta = 0 \quad \text{per } 0 \leq \vartheta < \vartheta_I$$

La soluzione della (12-I) che per $\xi = 0$ assume il valore ϑ_0 è:

$$(a) \quad \vartheta = \frac{\vartheta_0^m (\vartheta_0 - \vartheta_I)}{\vartheta_0^m - \vartheta_I^m} J_0 \left[\left(\frac{\vartheta_0^m - \vartheta_I^m}{\vartheta_0 - \vartheta_I} \right)^{1/2} \xi \right] + \\ + \vartheta_0 \vartheta_I \frac{\vartheta_0^{m-1} - \vartheta_I^{m-1}}{\vartheta_0^m - \vartheta_I^m}.$$

Detto $\bar{z}$ il primo zero di J_0 dopo l'origine e posto $\bar{z} = \left(\frac{\vartheta_0^m - \vartheta_I^m}{\vartheta_0 - \vartheta_I} \right)^{1/2} \bar{\xi}$, la funzione (a) nell'intervallo $(0, \bar{\xi})$ è decre-

scente ed assume il valore $\vartheta_0 \vartheta_1 \frac{\vartheta_0^{m-1} - \vartheta_1^{m-1}}{\vartheta_0^m - \vartheta_1^m} < \vartheta_1$ nel punto $\bar{\xi}$:
 esiste quindi un punto ξ_1 , maggiore di zero e minore di $\bar{\xi}$, in cui risulta $\vartheta(\xi_1) = \vartheta_1$.

La soluzione generale della (12-II) è poi:

$$\vartheta = AJ_0(\vartheta_1^{\frac{m-1}{2}} \xi) + BY_0(\vartheta_1^{\frac{m-1}{2}} \xi).$$

ed in essa è possibile determinare le due costanti A e B in maniera che risulti:

$$\vartheta(\xi_1) = \vartheta_1; \quad \vartheta(\xi_0) = 0.$$

Quindi la soluzione approssimata del problema soddisfacente le prescritte condizioni agli estremi è costituita dai due elementi:

$$\vartheta = \begin{cases} \frac{\vartheta_0^m(\vartheta_0 - \vartheta_1)}{\vartheta_0^m - \vartheta_1^m} J_0 \left[\left(\frac{\vartheta_0^m - \vartheta_1^m}{\vartheta_0 - \vartheta_1} \right)^{1/2} \xi \right] + \vartheta_0 \vartheta_1 \frac{\vartheta_0^{m-1} - \vartheta_1^{m-1}}{\vartheta_0^m - \vartheta_1^m} & \text{per } 0 \leq \xi \leq \xi_1. \\ AJ_0(\vartheta_1^{\frac{m-1}{2}} \xi) + BY_0(\vartheta_1^{\frac{m-1}{2}} \xi) & \text{per } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_0. \end{cases}$$

In maniera analoga si può vedere che anche per $n = 3$ è possibile costruire una soluzione del problema approssimato che sia finita per $\xi = 0$ e che si annulli per $\xi = \xi_0$.

Infatti, in luogo della (9), si dovrà ora considerare:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) + \frac{\vartheta_0^m - \vartheta_1^m}{\vartheta_0 - \vartheta_1} \vartheta - \vartheta_0 \vartheta_1 \frac{\vartheta_0^{m-1} - \vartheta_1^{m-1}}{\vartheta_0 - \vartheta_1} = 0$$

per $\vartheta_1 < \vartheta \leq \vartheta_0$,

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) + \frac{\vartheta_1^m - \vartheta_2^m}{\vartheta_1 - \vartheta_2} \vartheta - \vartheta_1 \vartheta_2 \frac{\vartheta_1^{m-1} - \vartheta_2^{m-1}}{\vartheta_1 - \vartheta_2} = 0$$

per $\vartheta_2 < \vartheta < \vartheta_1$,

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) + \vartheta_2^{m-1} \vartheta = 0$$

per $0 \leq \vartheta < \vartheta_2$;

la soluzione richiesta sarà così composta dai seguenti tre elementi:

$$\begin{aligned}
 \vartheta = & \begin{cases} \frac{\vartheta_0^m(\vartheta_0 - \vartheta_1)}{\vartheta_0^m - \vartheta_1^m} J_0 \left[\left(\frac{\vartheta_0^m - \vartheta_1^m}{\vartheta_0 - \vartheta_1} \right)^{1/2} \xi \right] + \vartheta_0 \vartheta_1 \frac{\vartheta_0^{m-1} - \vartheta_1^{m-1}}{\vartheta_0^m - \vartheta_1^m} & \text{per } 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ \\ A_1 J_0 \left[\left(\frac{\vartheta_1^m - \vartheta_2^m}{\vartheta_1 - \vartheta_2} \right)^{1/2} \xi \right] + B_1 Y_0 \left[\left(\frac{\vartheta_1^m - \vartheta_2^m}{\vartheta_1 - \vartheta_2} \right)^{1/2} \xi \right] + \\ + \vartheta_1 \vartheta_2 \frac{\vartheta_1^{m-1} - \vartheta_2^{m-1}}{\vartheta_1^m - \vartheta_2^m} & \text{per } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \\ \\ A_2 J_0 \left[\vartheta_2^{\frac{m-1}{2}} \xi \right] + B_2 Y_0 \left[\vartheta_2^{\frac{m-1}{2}} \xi \right] & \text{per } \xi_2 \leq \xi \leq \xi_0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il primo elemento è evidentemente uguale a quello ricavato nel caso $n = 2$.

Negli altri due elementi compaiono le costanti A_1 , B_1 , A_2 , B_2 le quali debbono intendersi determinate imponendo le seguenti condizioni: che il primo ed il secondo elemento di ϑ assumano il valore ϑ_1 in ξ_1 ; che il secondo ed il terzo elemento assumano il valore ϑ_2 in ξ_2 ; che il terzo elemento si annulli nel punto ξ_0 .

Il procedimento che si dovrà seguire nel caso in cui il numero n dei lati della spezzata sia maggiore di 3 sarà sostanzialmente uguale a quello esposto nei due casi ora trattati.

RENDICONTI
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

ANTONIO MELIS - FRANCO TESTÀ

Risoluzione numerica della equazione:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{n} \frac{dn^r}{dr} \right) + Ln = 0$$

**riguardante il problema dell'autoconfinamento
adiabatico di un plasma**

(Estratto dal fasc. 3-4 Vol. XXXIII 1963)

BOLOGNA
Azzoguldi - Società Tipografica Editriale
1963

Risoluzione numerica della equazione:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{n} \frac{dn}{dr} \right) + Ln = 0$$

riguardante il problema dell'autoconfinamento adiabatico di un plasma (*).

Nota (**) di ANTONIO MELIS e FRANCO TESTA

1) Nello studio dell'autoconfinamento cilindrico di un plasma si perviene¹⁾ nell'ipotesi di neutralità e ritenendo adiabatica la evoluzione termodinamica del fenomeno, alla equazione seguente:

$$(1) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{n} \frac{dn}{dr} \right) + Ln = 0$$

dove $n(r)$ è la densità numerica delle particelle, r la distanza del generico punto dall'asse della colonna e γ ha il consueto significato di rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante; infine L è un parametro che dipende dalla velocità relativa V , supposta costante, degli elettroni rispetto agli ioni e dai valori dell'entropia del gas ionico e del gas elettronico.

Poichè non è possibile esprimere le soluzioni della (1) mediante funzioni elementari, ci è sembrato interessante, a complemento dell'analisi qualitativa fatta nella Nota citata, procedere ad una valutazione numerica delle soluzioni stesse. Tale valutazione numerica è l'oggetto del presente lavoro.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Presentata alla Redazione dal Professor GIUSEPPE AYMERICH il giorno 6 giugno 1963.

¹⁾ A. MELIS, *L'autoconfinamento di una colonna di plasma in regime adiabatico*. (Atti Accad. Scienze di Torino, vol. 96, 1961-62).

2) Oltre al parametro L che compare esplicitamente nella (1) la configurazione della colonna del plasma dipende dal numero N di particelle che si trovano in ogni istante dentro un tronco di colonna di altezza unitaria, ossia:

$$N = 2\pi \int_0^{\infty} r n dr.$$

Allo scopo di trovare dei risultati numerici che non dipendano dai valori di L e di N operiamo innanzitutto la sostituzione di variabile indipendente

$$\xi = L^{1/2} r,$$

che fa assumere alla (1) la forma:

$$(2) \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dn}{d\xi} \right) + n = 0.$$

Con la sostituzione indicata si ha poi:

$$N = \frac{2\pi}{L} \int_0^{\infty} \xi n d\xi$$

la quale mostra esplicitamente come l'assegnare il numero globale N vincola, per così dire, le possibili distribuzioni radiali delle particelle. Ad ogni funzione $n(\xi)$ corrisponde cioè un ben determinato valore di N che dipende anche, come si vede, dal valore della costante L . Riesce pertanto naturale definire una funzione $v(\xi) = \frac{n(\xi)}{LN/2\pi}$, proporzionale alla « densità numerica relativa » n/N , la quale, per il modo stesso con cui è stata introdotta, non dipende da L ed N .

La conoscenza dell'andamento di $v(\xi)$ consente, disegnandone il grafico nel piano cartesiano (ξ, v) , di risalire, una volta assegnati i valori di L e di N , al valore in ogni punto della densità numerica del plasma in esame. Più precisamente, indicate rispettivamente con α e β le scale di lettura adottate per rappresentare le grandezze ξ e v ²⁾, in virtù delle sostituzioni

$$\xi = L^{1/2} r, \quad v = \frac{1}{LN/2\pi} n,$$

2) Ad esempio: 1 cm = α unità di ξ ; 1 cm = β unità di v .

le scale di lettura delle grandezze r ed n sono rispettivamente $L^{-1/2} \propto$ ed $\frac{LN}{2\pi} \beta^3$.

Si noti infine che, una volta determinata la funzione $n(\xi)$, è possibile dare anche l'andamento del campo magnetico H in seno al plasma. Si ha infatti:

$$H = \frac{\gamma e V}{L^{1/2}} \frac{1}{n^{2-\gamma}} \frac{dn}{d\xi}.$$

Pertanto ha interesse esaminare il comportamento della funzione $\frac{1}{n^{2-\gamma}} \frac{dn}{d\xi}$, il cui diagramma permette di risalire ai valori di H in ogni punto.

3) Nella Nota citata nel paragrafo 1 si è mostrato che possono aversi soluzioni della equazione (1) dei tre tipi seguenti:

1° tipo: soluzioni le quali, annullandosi in un punto $r_0 > 0$, sono sempre decrescenti per $0 < r < r_0$ e per $r \rightarrow 0$ tendono a valori infinitamente grandi;

2° tipo: soluzioni che parimenti si annullano soltanto in $r_0 > 0$ ma che si mantengono finite in tutto l'intervallo $0 \leq r \leq r_0$;

3° tipo: soluzioni che presentano due zeri positivi r_0 e r_1 e che nell'intervallo $r_1 < r < r_0$ sono ovunque finite.

Alla fine di detta Nota è stato suggerito un metodo di risoluzione approssimato atto alla valutazione numerica di soluzioni del 2° tipo: l'applicazione di tale procedimento aveva ivi lo scopo di mostrare la possibilità di soluzioni di tal genere.

Poichè però ora si vogliono calcolare soluzioni appartenenti a tutte le categorie previste si è adottato, per l'integrazione numerica, il metodo di EULERO-CAUCHY modificato applicato al sistema di equazioni del 1° ordine, equivalente alla (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dn}{d\xi} = \theta \\ \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{3n} \theta^2 - \frac{1}{\xi} \theta - \frac{3}{5} n^{4/3} \end{cases}$$

³⁾ nell'esempio: $1 \text{ cm} = L^{-1/2} \propto$ unità di r ; $1 \text{ cm} = \frac{LN}{2\pi} \beta$ unità di n .

dove per γ è stato scelto il valore particolarmente significativi $5/3$.

Secondo questo procedimento il valore n_i della funzione n nel generico punto ξ_i è dato da:

$$(4) \quad n_i^{(N)} = n_{i-1} + \frac{\theta_{i-1} + \theta_i^{(N-1)}}{2} \Delta \xi$$

in cui

$$\theta_i^{(N-1)} = \theta_{i-1} + \frac{\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{i-1} + \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_i^{(N-2)}}{2} \Delta \xi$$

Gli indici in alto stanno ad indicare l'ordine di approssimazione raggiunto, mentre $\Delta \xi$ è il « passo costante » scelto per incrementare la variabile indipendente ξ . Per quanto riguarda l'ordine di approssimazione è bene precisare che il processo viene ripetuto finchè non si raggiunge la « stabilità » delle cifre che si è deciso di mantenere in n_i .

In corrispondenza ad una particolare soluzione del sistema (3) si è poi calcolato, utilizzando la formula di SIMPSON ⁴⁾, il valore di $NL/2\pi$, dato dall'integrale $\int_0^\infty \xi n d\xi$, dove naturalmente l'intervallo di integrazione è stato limitato alla sola parte dell'asse ξ in cui n è diverso dallo zero. Si è infine costruita numericamente, secondo la sua definizione, la funzione $v(\xi)$ e si è poi calcolato, mediante i valori di n e della sua prima derivata, l'insieme dei valori di $n^{-1/2} \frac{dn}{d\xi}$ rappresentativi del campo magnetico.

4) Osservato che ciascuna soluzione di (3) viene a dipendere, in sostanza, dal valore dei tre parametri iniziali ξ_0 , n_0 e $\left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0$, si sono applicate le formule (4) mantenendo inalterati i valori di n_0 e $\left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0$ e facendo invece variare soltanto il punto di partenza ξ_0 . Sono state così individuate soluzioni del 1° tipo dando a ξ_0 valori molto piccoli mentre, al

⁴⁾ L'opportunità di adottare la formula di SIMPSON per il calcolo dell'integrale è stata suggerita dall'andamento molto regolare della funzione $n(\xi)$: è noto infatti che a detta formula di quadratura si può pervenire sostituendo alla funzione integranda, in ogni elemento in cui si suddivide l'intervallo di integrazione, un polinomio interpolatore di 2° grado.

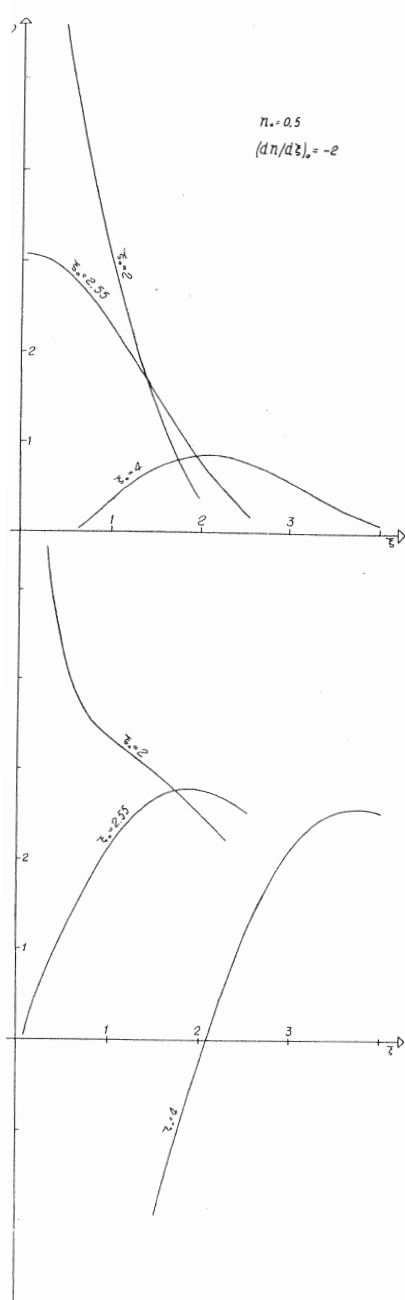


Fig. 1

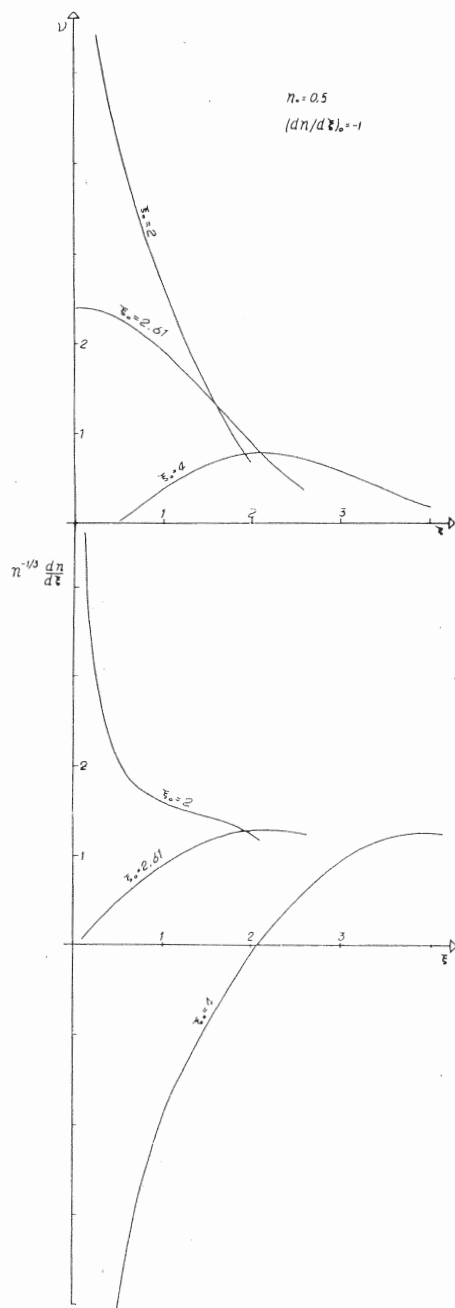


Fig. 2

contrario, partendo da valori molto grandi di ξ_0 si perviene a soluzioni del 3° tipo. In virtù di questa osservazione si è allora potuto localizzare, con un processo di approssimazioni successive, il valore $\bar{\xi}_0$ di ξ_0 in corrispondenza al quale si ottiene una curva del 2° tipo.

Per presentare un quadro abbastanza completo i calcoli sono stati svolti, in questo senso, per due valori diversi di $\left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0$, ossia per $\left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0 = -1$ e $\left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0 = -2$.

Nella Fig. 1 sono state rappresentate le soluzioni dei tre tipi del sistema (3) relative alle condizioni iniziali:

$$\left. \begin{array}{l} n_0 = 0, 5 \\ \left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0 = -1 \end{array} \right\} \text{ per } \xi_0 = 2; \quad \left. \begin{array}{l} n_0 = 0, 5 \\ \left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0 = -1 \end{array} \right\} \text{ per } \xi_0 = 2, 61;$$

$$\left. \begin{array}{l} n_0 = 0, 5 \\ \frac{dn}{d\xi} = -1 \end{array} \right\} \text{ per } \xi_0 = 4.$$

Analogamente la Fig. 2 dà le soluzioni corrispondenti ai valori iniziali:

$$\left. \begin{array}{l} n_0 = 0, 5 \\ \left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0 = -2 \end{array} \right\} \text{ per } \xi_0 = 2; \quad \left. \begin{array}{l} n_0 = 0, 5 \\ \left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0 = -2 \end{array} \right\} \text{ per } \xi_0 = 2, 55;$$

$$\left. \begin{array}{l} n_0 = 0, 5 \\ \left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0 = -2 \end{array} \right\} \text{ per } \xi_0 = 4.$$

Dall'esame dei grafici si nota che le soluzioni fisicamente accettabili sono soltanto quelle corrispondenti a valori di ξ_0 non minori di un certo $\bar{\xi}_0$, al di sotto del quale le soluzioni relative non rappresentano più configurazioni di confinamento del plasma.

Nel caso $\left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0 = -1$ si vede che il valore di $\bar{\xi}_0$ è approssimativamente 2,61, mentre nel caso $\left(\frac{dn}{d\xi}\right)_0 = -2$ tale valore è circa 2,55. A partire da questi valori di $\bar{\xi}_0$ si trovano le soluzioni corrispondenti a confinamento cilindrico del plasma con densità massima sull'asse del cilindro, mentre per $\bar{\xi}_0 > \bar{\xi}_0$ si ritrovano le soluzioni corrispondenti a confinamento cilindrico con densità massima ad una certa distanza dall'asse (confinamento a strato).

Nella parte inferiore delle figure suddette è stato poi riportato anche l'andamento del campo magnetico corrispondente ad ogni caso e si è così ricevuta completa conferma dei risultati che erano stati già previsti nella Nota cui questa trattazione numerica si riferisce.

RENDICONTI
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

ANTONIO MELIS

**Su alcuni moti piani non isentropici
e non stazionari di un fluido comprimibile**

(Estratto dal fasc. 3-4 Vol. XXXIV 1964)

BOLOGNA
Azzoguidi Società Tipografica Editoriale
1964

Su alcuni moti piani non isentropici e non stazionari di un fluido comprimibile (*)

Nota (**) di ANTONIO MELIS

SUNTO: *Si studiano piccole perturbazioni piane non isentropiche di moti unidimensionali non stazionari ad entropia costante. Ci si sofferma sulle perturbazioni di un moto uniforme e di un'onda di rarefazione completa, indicando come in alcuni casi particolari il problema si può trattare agevolmente per via numerica.*

SUMMARY - *A study is made of a small two-dimensional disturbances on the one-dimensional, non steady flow of an inviscid ideal compressible gas. The perturbed flow is not assumed isentropic. In particular a small disturbance on the uniform flow or a centred simple wave is studied.*

INTRODUZIONE

È noto che molti problemi riguardanti il movimento di un fluido conduttore dell'elettricità sotto l'azione di un campo magnetico impresso possono esser ridotti allo studio del moto di un gas neutro fittizio; tale moto può non essere isentropico anche nel caso che lo sia quello del gas reale conduttore¹⁾.

Essendoci proposti lo studio di problemi magnetoidrodinamici da questo punto di vista siamo stati condotti ad esaminare preliminarmente alcuni tipi di moti non isentropici in genere rotazionali nel campo dell'aerodinamica ordinaria.

B. TODESCHINI (II, III, IV) ha studiato situazione di questo tipo, limitandosi però al caso in cui il movimento piano del gas sia stazionario.

P. GERMAIN ed R. GUNDERSEN (V) hanno preso in esame moti non

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Presentata alla Redazione dal Prof. GIUSEPPE AYMERICH il 20 maggio 1964.

¹⁾ Vedi ad esempio H. GRAD (I).

isentropici unidimensionali di un fluido ideale cercando in particolare soluzioni prossime a quelle relative ad un assegnato moto isentropico. In questo ordine di idee GUNDERSEN risolve esplicitamente il problema trattando in un primo tempo (VI) il caso in cui il moto base è uniforme o una onda di rarefazione completa e successivamente (VII) il caso dell'onda semplice arbitraria.

In questo lavoro, dopo aver scritto in forma conveniente le equazioni generali del moto non stazionario e non isentropico di un gas non viscoso e non conduttore del calore in assenza di forze di massa, si studiano le piccole perturbazioni piane non isoentropiche di un moto unidimensionale isentropico, soffermandosi in particolare al caso in cui il moto base è uniforme o un'onda semplice a centro. In tal modo si esamina una situazione che, in un certo senso, comprende e generalizza quelle studiate dagli Autori citati. Si perviene così a studiare un sistema di quattro equazioni differenziali lineari nelle due componenti della velocità di perturbazione della particella, nella perturbazione della velocità locale del suono ed in quella dell'entropia. Si mostra come, per particolari categorie di movimenti prossimi ad un'onda semplice a centro, il problema si riduce allo studio di un sistema di tre equazioni differenziali lineari non omogenee in tre incognite, funzioni di due sole variabili indipendenti. Questo fatto è particolarmente significativo in quanto consente di suggerire, per tale tipo di problemi, una semplice trattazione per via numerica.

1 - Le equazioni che reggono il moto di un fluido comprimibile politropico, non viscoso e non conduttore del calore, in assenza di forze di massa, sono:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{d\bar{q}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \\ \text{(II)} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \bar{q} = 0 \\ \text{(III)} \quad \frac{dS}{dt} = 0 \\ \text{(IV)} \quad \rho = (\gamma - 1)e^{\frac{S-S_0}{C_v}} \rho r \end{array} \right.$$

dove i simboli hanno il seguente significato:

$\bar{q}$ è la velocità della particella di fluido;

ρ è la densità;

p è la pressione;

S è l'entropia per unità di massa;

γ è l'esponente adiabatico;

C è il calore specifico a volume costante.

Al fine di far comparire esplicitamente nel secondo membro della equazione del moto (1_I) il contributo che porta al gradiente di pressione il fatto che la entropia varia da particella a particella, in virtù della equazione di stato (1_{IV}) si può scrivere:

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{c^2}{\rho} \text{grad } \rho + \frac{c^2}{\gamma C_v} \text{grad } S$$

in cui c è la velocità locale del suono ed è:

$$(3) \quad c^2 = \gamma(\gamma - 1) e^{\frac{S-S_0}{C_v}} \rho^{\gamma-1}.$$

Dalla (3) si ha poi:

$$(4) \quad 2c \text{grad } c = \frac{c^2}{C_v} \text{grad } S + (\gamma - 1) \frac{c^2}{\rho} \text{grad } \rho$$

per cui, sostituendo nella (2) l'espressione di $\frac{c^2}{\rho} \text{grad } \rho$ ottenuta dalla (4), si ha:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{2c}{\gamma - 1} \text{grad } c - \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)C_v} \text{grad } S.$$

In luogo della (1_I) si può così scrivere:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = -\frac{2c}{\gamma - 1} \text{grad } c + \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)C_v} \text{grad } S.$$

Si osservi ora che, per via della (3) e tenendo conto della (1_{III}), si ha:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{\rho}{c} \frac{dc}{dt}$$

e quindi la equazione della continuità (1_{II}) assume la nuova forma:

$$2 \frac{dc}{dt} + (\gamma - 1) c \text{div } \bar{q} = 0$$

Pertanto, invece che nella forma (1) le equazioni del movimento possono essere scritte come segue:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{q}}{dt} = -\frac{2c}{\gamma-1} \text{grad } c + \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)C_v} \text{grad } S \\ 2\frac{dc}{dt} + (\gamma-1)c \text{div } \bar{q} = 0 \\ \frac{dS}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

che costituiscono un sistema di equazioni differenziali nelle funzioni incognite $\bar{q}$, c ed S . Intendendo studiare movimenti piani conviene scegliere un sistema di riferimento cartesiano il cui piano coordinato $z=0$ sia parallelo alle velocità delle particelle. Dette allora u e v le componenti della velocità secondo gli assi x ed y e supponendo inoltre che tutte le grandezze caratteristiche del movimento dipendano, oltre che dal tempo t , dalle due sole variabili locali x ed y , le (5) danno luogo al seguente sistema di equazioni differenziali:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2c}{\gamma-1} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)C_v} \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2c}{\gamma-1} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)C_v} \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \\ 2\left(\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y}\right) + (\gamma-1)c\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

2 - Ci si propone ora di studiare movimenti retti da questo sistema di equazioni e che siano prissimi ad un moto unidimensionale ad entropia costante. A questo scopo si può pensare di porre:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, t) + u_1(x, y, t) \quad ; \quad v = v_1(x, y, t) \\ c &= c_0(x, t) + c_1(x, y, t) \quad ; \quad S = S_0 + S_1(x, y, t). \end{aligned}$$

dove le grandezze contrassegnate con l'indice 0 sono relative ad un assegnato moto « base » unidimensionale (con velocità parallela all'asse x) ad entropia S_0 costante, mentre con l'indice 1 si denotano delle « piccole per-

turbazioni » di queste grandezze, tali cioè che, nei calcoli, sia lecito trascurare tutti i termini che le contengono con grado uguale o superiore al secondo. In questo ordine di approssimazione le equazioni che reggono il moto perturbato sono:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{2c_0}{\gamma-1} \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{2c_1}{\gamma-1} \frac{\partial c_0}{\partial x} - \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma-1)C_v} \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{2c_0}{\gamma-1} \frac{\partial c_1}{\partial y} - \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma-1)C_v} \frac{\partial S_1}{\partial y} = 0 \\ 2\left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial c_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial c_0}{\partial x}\right) + (\gamma-1)c_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + (\gamma-1)c_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0. \end{array} \right.$$

Si può subito osservare (vedi GUNDERSEN, lav. citato) che l'ultima equazione esprime il fatto che la S_1 rimane costante lungo le traiettorie del moto base, ossia lungo le $\frac{dx}{dt} = u_0$. D'altronde, in virtù della equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 u_0)}{\partial x} = 0$$

scritta per il moto base (ρ_0 = densità nel moto imperturbato), si vede che la forma differenziale $\rho_0(dx - u_0 dt)$ è il differenziale totale di una funzione ψ_0 che, eguagliata ad una costante, definisce una generica traiettoria. Si avrà perciò:

$$S_1 = \omega[\psi_0(x, t), y]$$

dove ω è una funzione arbitraria degli argomenti indicati. Sarà la natura fisica del problema e più precisamente l'esame delle cause che perturbano il moto base a suggerire la forma di questa funzione ω .

Tenuto conto di ciò le equazioni attraverso cui si determinano u_1 , v_1 e c_1 diventano:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{2c_0}{\gamma-1} \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{2c_1}{\gamma-1} \frac{\partial c_0}{\partial x} = \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma(\gamma-1)C_v} \frac{\partial \omega}{\partial \psi_0} \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{2c_0}{\gamma-1} \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma-1)C_v} \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ 2\left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial c_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial c_0}{\partial x}\right) + (\gamma-1)c_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = 0 \end{array} \right.$$

dove, per quanto detto, i secondi membri contengono soltanto funzioni note.

3 - Si esamini, innanzitutto, il caso particolarmente semplice in cui il moto base è uniforme. Detta U la velocità costante delle particelle in tale movimento ed indicata ancora con c_0 la relativa velocità del suono, pure costante, le equazioni che reggono il moto perturbato, nell'ordine di approssimazione detto in precedenza, sono, in virtù del sistema (7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} + U \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{2c_0}{\gamma - 1} - \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)C_v} \frac{\partial S_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + U \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{2c_0}{\gamma - 1} \frac{\partial c_1}{\partial y} - \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)C_v} \frac{\partial S_1}{\partial y} &= 0 \\ 2\left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + U \frac{\partial c_1}{\partial x}\right) + c_0(\gamma - 1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) &= 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial t} + U \frac{\partial S_1}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Con la sostituzione di variabili

$$\begin{aligned}\xi &= x - Ut \\ \eta &= y \\ \tau &= t\end{aligned}$$

il sistema diventa:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{2c_0}{\gamma - 1} c_1 - \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)C_v} S_1 \right] &= 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{2c_0}{\gamma - 1} c_1 - \frac{c_0^2}{\gamma(\gamma - 1)C_v} S_1 \right] &= 0 \\ 2\frac{\partial c_1}{\partial \tau} + c_0(\gamma - 1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\right) &= 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial \tau} &= 0.\end{aligned}$$

Si ottiene che l'entropia S_1 è una funzione arbitraria delle variabili ξ ed η (in questo caso infatti per la generica triettoria si ha: $\psi_0 = \rho_1 \xi$) e dalle

prime tre equazioni, eliminando u_1 e v_1 , si ricava:

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 c_1}{\partial \tau^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{c_0}{2\gamma C_v} S_1$$

da cui si vede che il problema è ridotto a quello di risolvere una equazione del tipo delle onde piane, non omogenea, per la funzione incognita c_1 . Le due componenti u_1 e v_1 della velocità si possono poi ottenere con semplici quadrature.

Una soluzione particolare si ha per $u_1 = v_1 = 0$. Si ottiene:

$$c_1 = \frac{c_0}{2\gamma C_v} S_1$$

e questo fatto mostra come una perturbazione della entropia influenza la velocità del suono senza mutare il primitivo campo di velocità. Questo classico risultato è riferito anche da GERMAIN e GUNDERSEN nel caso unidimensionale in cui ovviamente $S_1 = S_1(x - Ut)$.

4 - Ci si propone ora di studiare, nell'ordine di idee esposto al n. 2, il problema che si presenta quando il moto base è un'onda di rarefazione completa, rappresentato pertanto da un'onda semplice a centro ⁽²⁾. Per u_0 e c_0 si devono ora assumere le espressioni:

$$u_0 = (1 - \mu^2) \left(\frac{x}{t} - c^* \right)$$

$$c_0 = \mu^2 \frac{x}{t} + (1 - \mu^2) c^*$$

dove μ^2 è una costante che si esprime attraverso γ nel modo seguente: $\mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ ed in cui c^* rappresenta la velocità del suono nel gas in quiete. Con la sostituzione dei variabili:

$$\xi = \mu^2 \frac{x}{c^* t} + (1 - \mu^2)$$

$$\eta = \mu^2 x + (1 - \mu^2) c^* t$$

$$\zeta = \mu^2 y$$

²⁾ Vedi COURANT-FRIEDRICHIS (VIII), cap. III.

analoga a quella utilizzata da W. CHESTER (IX) per studiare le piccole perturbazioni irrotazionali ed isentropiche di un'onda di rarefazione, le grandezze u_0 e c_0 si esprimono così:

$$u_0 = \alpha c^*(\xi - 1) \quad ; \quad c_0 = c^*\xi \quad \left(\alpha = \frac{1 - \mu^2}{\mu^2} > 0 \right)$$

e si constata subito che la entropia S_1 dipende dalle variabili ξ ed η soltanto attraverso la loro combinazione $\theta = \xi^\alpha \eta$. Ciò si deduce osservando che l'ultima delle equazioni (7), scritta nelle nuove variabili, ha la forma:

$$\xi \frac{\partial S_1}{\partial \xi} - \alpha \eta \frac{\partial S_1}{\partial \eta} = 0$$

e tanto basta per provare l'asserto. Si ha pertanto:

$$S_1 = \omega(\theta, \zeta)$$

e quindi le equazioni (8) diventano:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} c^* \frac{\xi}{\eta} \left[-\xi \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \alpha \left(\eta \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \xi \frac{\partial c_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial c_1}{\partial \eta} + u_1 + c_1 \right) \right] = \frac{c^{*2} \xi^2}{\gamma(\gamma-1)C_v} (\alpha+1) \xi^\alpha \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \\ c^* \frac{\xi}{\eta} \left[-\xi \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \alpha \left(\eta \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial c_1}{\partial \zeta} \right) \right] = \frac{c^{*2} \xi^2}{\gamma(\gamma-1)C_v} \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \\ \xi \frac{\partial c_1}{\partial \xi} - \alpha \eta \frac{\partial c_1}{\partial \eta} - \frac{1}{\alpha} \left(\xi \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \right) - (u_1 + c_1) = 0 \end{array} \right.$$

La non omogeneità delle prime due equazioni di questo sistema proviene evidentemente dal fatto che il movimento in studio è non isentropico. È chiaro che se si ritenesse la entropia costante e se si facesse la ulteriore ipotesi di irrotazionalità del movimento il sistema (9) si potrebbe ridurre all'unica equazione nel potenziale di velocità introdotta da CHESTER nella Nota già citata.

È interessante notare che il sistema (9) ammette la soluzione particolare $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ soltanto se la funzione ω , e quindi c_1 , risulta indipendente dalla variabile ζ . Si deve perciò osservare che, a differenza di quanto avviene nel caso in cui il moto base è uniforme, il fatto che la entropia dipenda dalla variabile ζ , e quindi dalla y , comporta necessariamente una perturbazione nel primitivo campo di velocità.

La ricerca di soluzioni particolari del sistema (9) sembra presentare

notevoli difficoltà di carattere analitico. Per questo può essere utile mostrare come, per alcuni problemi al contorno particolari, è possibile ridurre tale difficoltà abbassando da tre a due il numero delle variabili indipendenti. Se si presenta infatti un problema al contorno in cui non compare alcuna lunghezza caratteristica dell'ambiente in cui si svolge il movimento³⁾ e se in più è possibile assegnare la ω in funzione di θ e ζ soltanto attraverso la combinazione adimensionale θ/ζ , si può ridurre notevolmente la difficoltà del problema introducendo, a fianco della ξ , l'altra variabile adimensionale $z = \frac{\eta}{\zeta}$. Quanto detto si potrà ad esempio realizzare quando in un'onda di rarefazione prodotta dal moto di un pistone nella direzione negativa dell'asse x si manifesta in un certo istante una perturbazione puntiforme della entropia nel gas a contatto col pistone. Osservato che si ha:

$$\eta \frac{\partial}{\partial \eta} = z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{e} \quad \eta \frac{\partial}{\partial \zeta} = -z^2 \frac{\partial}{\partial z}$$

il sistema (9) si modifica come segue:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\xi \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \alpha \left(z \frac{\partial u_1}{\partial z} + \xi \frac{\partial c_1}{\partial \xi} + z \frac{\partial c_1}{\partial z} + u_1 + c_1 \right) = \frac{c^*(\alpha + 1)}{\gamma(\gamma - 1)C_v} \xi^{x+1} z \omega' \\ -\xi \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \alpha \left(z \frac{\partial v_1}{\partial z} - z^2 \frac{\partial c_1}{\partial z} \right) = -\frac{c^*}{\gamma(\gamma - 1)C_v} \xi^{x+1} z^2 \omega' \\ \xi \frac{\partial c_1}{\partial \xi} - \alpha z \frac{\partial c_1}{\partial z} - \frac{1}{\alpha} \left(\xi \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + z^2 \frac{\partial u_1}{\partial z} - z^2 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - (u_1 + c_1) = 0 \end{array} \right.$$

dove con ω' si indica la derivata della funzione ω rispetto al suo unico argomento $\xi^z z$.

Il sistema testè scritto è costituito da tre equazioni lineari, due delle quali non omogenee, nelle tre incognite u_1 , v_1 e c_1 funzioni delle due sole variabili indipendenti ξ e z .

Questo fatto consente di trattare agevolmente con metodi numerici il problema della determinazione delle soluzioni, naturalmente pensando assegnate le necessarie condizioni al contorno. A questo scopo si veda ad esempio il metodo suggerito da R. SAUER (X) basato sulla determinazione numerica, punto per punto, del diagramma delle caratteristiche.

³⁾ Si veda ad esempio la Nota di J. B. L. POWELL: *The diffraction of a rarefaction wave by a corner*, (J. Fluid Mech., 3, Cambridge 1958) in cui si studia il movimento isentropico ed irrotazionale di un fluido che lambisce una parete formante un angolo quasi piatto. Il problema viene risolto introducendo due sole variabili adimensionali ed utilizzando, per via della supposta irrotazionalità, un integrale primo del movimento.

BIBLIOGRAFIA

- I) H. GRAD - *Reducible problems in Magneto-Fluid Dynamic steady flows*, Reviews of modern Physics, 32 n. 4, 1960.
- II) B. TODESCHINI - *Correnti ipersoniche rotazionali piane ottenute perturbando correnti rettilinee*, Rend. Ist. Lombardo Sc. Lettere, LXXXVII, Milano 1955.
- III) B. TODESCHINI - *Le condizioni di isentropicità e di irrotazionalità nell'aerodinamica piana*, Rend. Ist. Lombardo Sc. Lettere, LXXXVIII, Milano 1955.
- IV) B. TODESCHINI - *Sulle correnti piane poco rotazionali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, XXII, 1957.
- V) GERMAIN P., GUNDERSEN R. - *Sur les écoulements unidimensionnels d'un fluide parfait à entropie faiblement variable*, Comptes rendus Acad. Sciences, T. 241, II, Paris 1955.
- VI) GUNDERSEN R. - *The flow of a compressible fluid with weak entropy changes*, J. Fluid Mech. 3, Cambridge 1958.
- VII) GUNDERSEN R. - *The Non-isentropic Perturbation of an arbitrary Simple Wave*, J. Math. Mech., 9, Bloomington 1960.
- VIII) COURANT R., FRIEDRICH K. O. - *Supersonic flow and shock waves*, New York 1948.
- IX) CHESTER W. - *Unsteady compressible flow in ducts*, Q. Mech. appl. Math., VII, Oxford 1954.
- X) SAUER R. - *Écoulements des fluides compressible*, Paris 1951.

RENDICONTI
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

ANTONIO MELIS

**Su una classe di moti non stazionari
di un gas perfetto**

(Estratto dal fasc. 3-4 Vol. XXXV 1965)

BOLOGNA
Azzoguidi - Società Tipografica Editoriale
1965

Su una classe di moti non stazionari di un gas perfetto (*)

Nota (**) di ANTONIO MELIS

SUNTO: *Si danno alcuni caratteri generali dei movimenti isoentropici non stazionari di un gas perfetto che mantengono invariate, al trascorrere del tempo, le linee di campo della velocità.*

1.

È noto come siano possibili movimenti non stazionari di un fluido incomprimibile che conservano invariate col tempo le linee di campo della velocità¹⁾. A quanto mi risulta per i fluidi comprimibili sono stati considerati moti dello stesso genere soltanto limitatamente al caso piano e presupponendo la irrotazionalità del movimento²⁾.

In questo lavoro intendo occuparmi di moti isoentropici non stazionari di un gas perfetto a linee di flusso invarianti nel caso tridimensionale, allo scopo di precisarne, almeno in parte, alcuni caratteri cinematici e geometrici. Constato in primo luogo che in tali movimenti non possono esistere linee di flusso chiuse ed è interessante osservare che tale proprietà nel caso dei moti stazionari è nota limitatamente all'ipotesi di irrotazionalità, mentre nel caso attuale si prescinde del tutto da questa. Mostro poi che esistono e sono permanenti le superficie di LAMB, ossia quelle superficie che sono contemporaneamente di flusso per il vettore velocità e per il suo rotore, mentre invece non è possibile definire le superficie di BERNOULLI. Ciò a differenza di quanto avviene nei moti stazionari per i quali si dimostra l'esistenza delle superficie di BERNOULLI e se ne prova la loro identità con quelle di LAMB.

Faccio infine vedere come il problema si può tradurre nella ricerca di due sole funzioni incognite. Ciò in conseguenza del fatto che risulta

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Presentata alla Redazione dal Prof. GIUSEPPE AYMERICH il 5-7-1965.

1) Si veda, ad esempio, TH. V. KARMAN, *Accelerated flow of an incompressible fluid with wake formation*. (Annali Mat. pura ed appl., T. XXIX, 1949, pag. 247).

2) G. AYMERICH, *Moti non permanenti di un gas perfetto con linee di corrente invarianti*. (Rendiconti Sem. Fac. Scienze Univ. Cagliari, XXVII, 1957).

particolarmente semplice esprimere il campo di velocità mediante i tre potenziali scalari di MONGE, uno dei quali si può dare in funzione degli altri due.

2.

Ricordo che le equazioni che reggono il movimento di un gas perfetto in condizioni isoentropiche, in assenza di forze di massa, possono scriversi come segue³⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{1}{\gamma - 1} \text{grad } a^2 = 0 \\ \frac{da^2}{dt} + (\gamma - 1)a^2 \text{div } \mathbf{q} = 0 \end{cases}$$

dove $\mathbf{q}$ è la velocità di una particella fluida, a è la velocità locale del suono, con $\frac{dF}{dt}$ si indica la derivata sostanziale della generica funzione F , ossia:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla) F,$$

ed infine γ è il coefficiente adiabatico, cioè il rapporto fra il calore specifico a pressione costante ed il calore specifico a volume costante.

In questa Nota mi propongo di esaminare soluzioni del sistema (1) del tipo:

$$\mathbf{q}(P, t) = f(t)\mathbf{v}(P)$$

in cui cioè la variabile temporale risulti separata da quelle locali nel modo indicato. Ciò equivale a studiare movimenti, come detto al n. 1, non stazionari a linee di flusso invariabili col tempo.

Le equazioni del moto diventano:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} \mathbf{v} + f^2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\gamma - 1} \text{grad } a^2 &= 0 \\ \frac{\partial a^2}{\partial t} + f[(\mathbf{v} \cdot \nabla)a^2 + (\gamma - 1)a^2 \text{div } \mathbf{v}] &= 0 \end{aligned}$$

³⁾ Vedi, ad esempio, A. MELIS, *Su alcuni moti piani non isoentropici e non stazionari di un fluido comprimibile*. (Rendiconti Sem. Fac. Scienze Univ. Cagliari, XXXIV, fasc. 3/4, 1964).

Queste sono soddisfatte se:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(I)} & \frac{df}{dt} = \alpha f^2(t); \quad \text{(II)} \quad a^2 = f^2(t) c^2(P); \\ \text{(III)} & \alpha \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\gamma - 1} \text{grad } c^2 = 0 \\ \text{(IV)} & \frac{2}{\gamma - 1} \alpha c^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \mathbf{v} \cdot \text{grad } c^2 + c^2 \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{array} \right.$$

dove la costante α ora introdotta dimensionalmente rappresenta l'inverso di un tempo. Posto allora:

$$t_0 = \frac{1}{\alpha}$$

si ottiene subito dalla (2_I):

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{t - t_0}$$

in cui la costante di integrazione è stata scelta, senza con ciò ledere la generalità, in modo che sia $f(0) = 1$. Naturalmente la espressione scritta per $f(t)$ vale per valori di t differenti da t_0 , ad esempio per $t > t_0$.

Osservo subito che la equazione (2_{IV}), insieme con la (2_{III}), consente di esprimere attraverso $\mathbf{v}$ la velocità «ridotta» c del suono. Infatti dalla (2_{III}) si ottiene:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \text{grad } c^2 = -(\alpha \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v});$$

sostituendo nella (2_{IV}) si ha allora:

$$\frac{2}{\gamma - 1} \alpha c^2 - \mathbf{v} \cdot (\alpha \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2) + c^2 \text{div } \mathbf{v} = 0$$

e quindi:

$$c^2 = \frac{2\alpha v^2 + \mathbf{v} \cdot \text{grad } v^2}{2 \left(\frac{2}{\gamma - 1} \alpha + \text{div } \mathbf{v} \right)}$$

Si ha così c espressa attraverso il vettore $\mathbf{v}$ e questa circostanza va tenuta presente in tutte le considerazioni che seguono.

3.

Indicato con dP lo spostamento elementare sulla generica linea Γ di flusso, per via della (2_{III}) si ha:

$$\alpha \mathbf{v} \cdot dP + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1} \right) \cdot dP = 0.$$

Detto allora P_0 un punto, per altro arbitrario, a partire dal quale si valutino gli archi su Γ e detto P il punto corrente su Γ , si ricava:

$$\alpha \int_{P_0}^P \mathbf{v} \cdot dP + \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1} \right)_P = \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1} \right)_{P_0}$$

È facile, utilizzando questa relazione, mostrare che le linee di campo di $\mathbf{v}$ non possono essere circuiti chiusi. Se così fosse, infatti, per una qualunque di tali linee dovrebbe aversi:

$$\oint \mathbf{v} \cdot dP = 0$$

e ciò (supposta la regolarità del campo vettoriale $\mathbf{v}$ e nell'ipotesi che la regione in cui avviene il moto sia semplicemente connessa) è in contrasto col fatto che la direzione della tangente in ogni punto della linea su cui si integra coincide con quella del vettore $\mathbf{v}$. Da questo punto di vista i moti in esame (non stazionari, generalmente rotazionali ed a linee di flusso permanenti) possono essere accostati a quelli stazionari (a linee di corrente ovviamente permanenti) irrotazionali.

La relazione scritta mostra poi che per i moti in studio non è possibile formulare il classico teorema di BERNOULLI ed è quindi pure impossibile definire le superficie di BERNOULLI.

Si può invece subito mostrare l'esistenza delle superficie di LAMB, di quelle superficie cioè che, in ogni loro punto, hanno per piano tangente il piano individuato dai vettori $\mathbf{v}$ e $\text{rot } \mathbf{v}$. La equazione (2_{III}), ricordando l'espressione esplicita di $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, porge infatti:

$$(3) \quad \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = -\alpha \mathbf{v} - \text{grad } \mathfrak{B}$$

dove con $\mathfrak{B}$ si è indicato il binomio di BERNOULLI, ossia:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2} v^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1}.$$

Poichè, per la (3):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}) = -\alpha \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

si osserva che si ha:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}) = 0.$$

È così realizzata la condizione necessaria e sufficiente perchè il vettore di LAMB « ridotto » $\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}$ sia un quasi gradiente⁴⁾. Si potrà allora scrivere:

$$(4) \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mu(P) \operatorname{grad} \psi(P)$$

con μ e ψ funzioni opportune del posto.

Come è noto le superficie di equazione $\psi = \text{cost.}$, caratterizzate dal fatto di contenere le linee di campo della velocità e quelle della vorticità, sono le cosiddette superficie di LAMB. Si può quindi dire che nella categoria di movimenti non stazionari descritti dalle soluzioni in esame dette superficie esistono e, come le linee di flusso della velocità $\mathbf{q}$, non si deformano al trascorrere del tempo. L'ultima affermazione è giustificata dal fatto che il termine temporale $f(t)$ compare, nella espressione di $\operatorname{rot} \mathbf{q} \times \mathbf{q}$, solo quale fattore moltiplicativo di $\operatorname{grad} \psi$.

4.

In virtù delle relazioni (3) e (4) scritte al n. 3 si ricava subito:

$$(5) \quad \mathbf{v} = -\frac{1}{\alpha} (\mu \operatorname{grad} \psi + \operatorname{grad} \mathcal{B})$$

Questa formula esprime il vettore $\mathbf{v}$ in funzione dei tre potenziali scalari di MONGE μ , ψ e $\mathcal{B}$ ⁵⁾.

È necessario osservare subito che questa espressione diventa indeterminata nel caso dei moti stazionari⁶⁾ e pertanto tutte le conside-

⁴⁾ Un vettore così fatto, secondo la terminologia di KELVIN, vien detto anche complesso lamellare.

⁵⁾ J. L. ERICKSEN, *Tensor Fields*. (Encyclopedia of Physics, Vol. III/1, pag. 828).

⁶⁾ Nei moti stazionari si ha infatti:

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{q}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{q} \times \mathbf{q} = -\operatorname{grad} \mathcal{B}$$

razioni che verranno svolte in seguito sono valide soltanto nei movimenti *non* stazionari a linee di flusso permanenti.

È facile convincersi che, una volta assegnato il campo vettoriale $\mathbf{v}$ soddisfacente le equazioni (2), i tre potenziali scalari sopra detti si possono definire in modo univoco.

Innanzitutto, in conformità con la definizione della funzione $\mathcal{B}$, si ha subito esplicitamente:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} v^2 + \frac{2\alpha v^2 + \mathbf{v} \cdot \text{grad } v^2}{2(\gamma - 1) \left(\frac{2}{\gamma - 1} \alpha + \text{div } \mathbf{v} \right)}$$

La funzione ψ risulta poi determinata completamente da un punto di vista geometrico, ricordando che le $\psi = \text{cost.}$ sono le equazioni delle superficie di LAMB definite dai campi vettoriali $\mathbf{v}$ e $\text{rot } \mathbf{v}$.

Infine per la terza funzione μ si ottiene, moltiplicando ambo i membri della (5) scalarmente per $\text{grad } \psi$ ⁷⁾:

$$\mu(\text{grad } \psi)^2 + \text{grad } \mathcal{B} \cdot \text{grad } \psi = 0$$

e quindi:

$$\mu = - \frac{\text{grad } \mathcal{B} \cdot \text{grad } \psi}{(\text{grad } \psi)^2}$$

Questo mostra come i tre potenziali di MONGE non siano fra di loro indipendenti ma anzi come uno di essi, μ , possa scriversi in funzione degli altri due ψ e $\mathcal{B}$.

In base a quest'ultima osservazione la relazione (5) diventa:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\text{grad } \mathcal{B} \cdot \text{grad } \psi}{(\text{grad } \psi)^2} \text{grad } \psi - \text{grad } \mathcal{B} \right)$$

e quindi, ricordando la nota formula del doppio prodotto vettoriale:

$$\mathbf{v} = \frac{(\text{grad } \mathcal{B} \times \text{grad } \psi) \times \text{grad } \psi}{(\text{grad } \psi)^2}.$$

e quindi

$$\mathcal{B} = -\mu\psi \text{ con } \mu = \text{cost.}$$

7) Si ricordi che, essendo $\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mu \text{ grad } \psi$, si ha:

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad } \psi = 0.$$

Si arriva così a provare quanto detto alla fine del n. 1, in quanto il problema dello studio dei movimenti *rotazionali non stazionari* a linee di flusso permanenti è ridotto alla determinazione delle due sole funzioni incognite ψ e $\mathfrak{B}$. Le equazioni che tali funzioni debbono soddisfare sono evidentemente quelle che si deducono dalla (2_{III}) una volta che in essa vengano introdotte le espressioni di c^2 e di $\mathfrak{v}$ in funzione di $\mathfrak{B}$ e ψ .

In tal modo si generalizza il procedimento usato nel caso stazionario irrotazionale con l'introduzione del potenziale di velocità; tuttavia omettiamo di trascrivere le equazioni in ψ e $\mathfrak{B}$ pochè esse risultano assai complesse e non sembrano facilmente trattabili.

RENDICONTI
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

ANTONIO MELIS

**Perturbazioni piane
di un moto unidimensionale
in magnetofluidodinamica**

(Estratto dal fasc. 3-4 Vol. XXXV 1965)

BOLOGNA
Azzoguidi - Società Tipografica Editrice
1965

Perturbazioni piane di un moto unidimensionale in magnetofluidodinamica (*)

Nota (**) di ANTONIO MELIS

INTRODUZIONE

Diversi Autori hanno osservato come nello studio di problemi di magnetoaerodinamica, di per sè così complessi, sia utile stabilire una analogia con problemi della aerodinamica ordinaria. Ciò naturalmente in generale non è possibile, ma vi è una varietà di casi in cui, mediante la introduzione di grandezze definite in maniera opportuna, le equazioni che reggono l'un problema sono del tutto simili a quelle riguardanti gas non conduttori¹. Ci si trova appunto di fronte ad una situazione di questo genere quando si intraprende lo studio del movimento piano di un gas ideale, perfetto conduttore dell'elettricità, soggetto ad un campo magnetico trasverso²): il problema viene facilmente ricondotto ad uno di aerodinamica ordinaria per un gas ideale non isentropico.

Essendomi proposto lo studio di problemi magnetoaerodinamici di questo tipo ho studiato, in una mia precedente Nota³), moti piani non isentropici e non stazionari di fluidi comprimibili ordinari.

In questo lavoro considero il caso magnetoaerodinamico: supposto unidimensionale il moto base, esamino il moto prossimo a questo dovuto

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Presentata alla Redazione dal Prof. GIUSEPPE AYMERICH il 26 ottobre 1965.

¹) Si veda, ad esempio, H. GRAD: « Reducible Problems in Magneto-Fluid Dynamic Steady Flows » (Reviews of Modern Physics, Vol. 32, 1960, pag. 830), M. MITCHNER: « Magnetohydrodynamic flow with a transverse magnetic field » (The Magnetodynamics of Conducting Fluids, D. Bershadler Editor, Stanford University Press, 1959, pag. 61).

²) Si veda A. A. BLANK-H. GRAD: « Fluid Dynamical Analogies » (Notes on Magneto-Hydrodynamics, VII, Inst. Math. Sciences, New York University, 1958).

³) A. MELIS: « Su alcuni moti piani non isentropici e non stazionari di un fluido comprimibile » (Rendiconti Sem. Fac. Scienze Univ. Cagliari, XXXIV, 1964).

ad una perturbazione bidimensionale, inizialmente assegnata, di qualche grandezza fondamentale, ad esempio del campo magnetico.

Nel n. 1 faccio alcuni richiami di carattere generale. Nel n. 2 scrivo in maniera conveniente le equazioni del moto, supposto isentropico, introducendo quali incognite del problema la velocità locale del suono a , le due componenti della velocità u e v e la « entropia fittizia » $S_* = B/\rho$ (rapporto fra l'induzione magnetica e la densità). Scrivo poi le equazioni per le piccole perturbazioni piane di un moto unidimensionale arbitrariamente assegnato. Nel n. 3 tratto il caso particolare in cui il moto base è un'onde e metto in evidenza la possibilità di perturbazioni delle grandezze termodinamiche e magnetiche che lasciano inalterato il campo di velocità.

— 1 —

È noto⁴⁾ che le equazioni che reggono il movimento piano di un fluido ideale comprimibile perfetto conduttore dell'elettricità, in presenza di un campo magnetico ovunque ortogonale alla velocità delle particelle (transverse flow) si possono scrivere come segue:

$$(1) \quad \rho \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \nabla p_* = 0$$

$$(2) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \mathbf{q}) = 0$$

$$(3) \quad \frac{dS}{dt} = 0$$

$$(4) \quad \frac{dS_*}{dt} = 0$$

$$(5) \quad p = p(\rho, S).$$

In queste equazioni $\mathbf{q} = u(x, y, t)\mathbf{i} + v(x, y, t)\mathbf{j}$ rappresenta la velocità della generica particella, ρ la densità ed S è l'entropia specifica (per unità di massa); le grandezze con asterisco S_* e p_* sono rispettivamente il rapporto B/ρ tra induzione magnetica e densità e la « pressione totale » data da:

$$(6) \quad p_* = p(\rho, S) + \frac{B^2}{2\mu} = p(\rho, S) + \frac{\rho^2 S_*^2}{2\mu}.$$

In particolare la (3) esprime la circostanza fisica che l'entropia S ,

⁴⁾ H. GRAD, lavoro citato.

legata alla pressione p e alla densità ρ dalla equazione di stato (5), si mantiene inalterata per ogni singola particella in quanto il fluido è stato supposto non conduttore del calore. Non si deve escludere il caso assai significativo in cui il valore dell'entropia è uguale per tutte le particelle (moto isentropico): tale eventualità sarà realizzata se all'istante iniziale la distribuzione dell'entropia è uniforme in tutta la massa gassosa.

Anche S_* , il cui comportamento è regolato dalla equazione (4), non varia per ogni particella in moto, con valore in generale diverso da particella a particella.

A parte la presenza della S_* con la equazione (4) e l'introduzione della p_* in luogo della p , è evidente l'analogia del sistema di equazioni sopra scritto con quello che regge il moto di un fluido ideale ordinario (non conduttore). Come è stato osservato dagli Autori già citati, diventa ad esso identico, a prescindere dalla equazione di stato, quando si verifica uno dei casi seguenti:

I) $S_* = \text{cost.}$

II) $S = \text{cost.}$

III) $S_* = S_*(S).$

In ciascuno di questi casi infatti p_* diventa funzione di due sole altre grandezze: la (6) è la relativa « equazione di stato » che esprime p_* attraverso ρ ed S (I e III caso) ovvero ρ ed S_* (II caso).

— 2 —

Ponendomi nella situazione II del n. 1 intendo esaminare le piccole perturbazioni piane isentropiche di un movimento unidimensionale pure ad entropia costante. Poichè p si esprime attraverso ρ nel modo seguente:

$$p = K\rho^\gamma$$

con K e γ costanti, la (6) diventa:

$$p_* = K\rho^\gamma + \frac{\rho^2 S_*^2}{2\mu}$$

ed indicate con a ed A rispettivamente la velocità locale del suono e la velocità di ALFVÉN, si ha:

$$(7_1) \quad \frac{\partial p_*}{\partial \rho} = a_*^2 = a^2 + A^2$$

dove

$$(7_2) \quad a^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1}, \quad (7_3) \quad A^2 = \frac{S_*^2\rho}{\mu}.$$

Si osservi ora che:

$$\nabla p_* = \frac{\partial p_*}{\partial \rho} \nabla \rho + \frac{\partial p_*}{\partial S_*} \nabla S_*$$

per cui, tenuto conto della (7₁) e della (7₃),

$$\frac{1}{\rho} \nabla p_* = \frac{a_*^2}{\rho} \nabla \rho + \frac{A^2}{S_*} \nabla S_*.$$

D'altra parte, in virtù della (7₂) si ha:

$$\frac{1}{\rho} \nabla \rho = \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{a} \nabla a$$

e quindi:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p_* = \frac{2}{\gamma-1} \frac{a_*^2}{a} \nabla a + \frac{A^2}{S_*} \nabla S_*.$$

Sempre dalla (7₂) si ottiene infine:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

per cui, in luogo della (1) e (2), si può scrivere:

$$(8) \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\frac{2}{\gamma-1} \frac{a_*^2}{a} \nabla a - \frac{A^2}{S_*} \nabla S_*$$

$$(9) \quad 2 \frac{da}{dt} + (\gamma-1)a(\nabla \cdot \mathbf{q}) = 0$$

alle quali va naturalmente associata l'ulteriore equazione:

$$(10) \quad \frac{dS_*}{dt} = 0.$$

Le (8), (9) e (10) costituiscono un sistema di equazioni differenziali contenente come incognite le componenti di $\mathbf{q}$, la velocità del suono a e la

« entropia fittizia » S_* e sarà questo il sistema che verrà utilizzato per lo studio dei moti di cui si è detto all'inizio di questo paragrafo. Naturalmente i coefficienti della equazione (8) debbono intendersi espressi attraverso a ed S_* ; ciò si ottiene se si tien conto che, per la (7₂), si ha:

$$\rho = \left(\frac{a^2}{K\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

e quindi:

$$A^2 = \frac{S_*^2}{\mu} \left(\frac{a^2}{K\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad a_*^2 = a^2 + \frac{S_*^2}{\mu} \left(\frac{a^2}{K\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Per studiare i movimenti retti dalle equazioni (8), (9) e (10) prossimi ad un moto unidimensionale si può porre:

$$\begin{aligned} u &= u^0(x, t) + u^1(x, y, t); & v &= v^1(x, y, t); \\ a &= a^0(x, t) + a^1(x, y, t); & S_* &= S_*^0(x, t) + S_*^1(x, y, t) \end{aligned}$$

dove le grandezze contrassegnate con l'indice ⁰ riguardano un assegnato moto base unidimensionale (con velocità ovunque parallela all'asse x) mentre quelle con indice 1 sono delle « piccole perturbazioni » di queste grandezze, di cui si possono trascurare le potenze di grado superiore al primo. Le equazioni per il moto perturbato sono allora:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u^1}{\partial t} + u^0 \frac{\partial u^1}{\partial x} + u^1 \frac{\partial u^0}{\partial x} + M^0 \frac{\partial a^1}{\partial x} + N^0 \frac{\partial S_*^1}{\partial x} + \\ & + \left[\left(\frac{\partial M}{\partial a} \right)^0 \frac{\partial a^0}{\partial x} + \left(\frac{\partial N}{\partial a} \right)^0 \frac{\partial S_*^0}{\partial x} \right] a^1 + \left[\left(\frac{\partial M}{\partial S_*} \right)^0 \frac{\partial a^0}{\partial x} + \left(\frac{\partial N}{\partial S_*} \right)^0 \frac{\partial S_*^0}{\partial x} \right] S_*^1 = 0 \\ & \frac{\partial v^1}{\partial t} + u^0 \frac{\partial v^1}{\partial x} + M^0 \frac{\partial a^1}{\partial y} + N^0 \frac{\partial S_*^1}{\partial y} = 0 \\ & 2 \left(\frac{\partial a^1}{\partial t} + u^0 \frac{\partial a^1}{\partial x} + u^1 \frac{\partial a^0}{\partial x} \right) + (\gamma - 1) c^0 \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial y} \right) + (\gamma - 1) c^1 \frac{\partial u^0}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial S_*^1}{\partial t} + u^0 \frac{\partial S_*^1}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right.$$

dove per brevità si è posto:

$$M(a, S_*) = \frac{2}{\gamma - 1} \left[a + \frac{(K\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}}}{\mu} S_*^2 a^{\frac{\gamma-1}{\gamma-1}} \right]$$

$$N(a, S_*) = \frac{(K\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}}}{\mu} S_* a^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

Ovviamente con l'indice 0 si sono contrassegnate le determinazioni di M , di N e delle loro derivate in corrispondenza all'assegnato moto base. Il sistema (11) si presenta del tutto simile, a parte le espressioni dei coefficienti e la presenza del termine lineare in S_*^1 nella prima equazione, a quello da me già trattato nella Nota precedentemente citata.

Interessa notare come l'ultima delle (11), che stabilisce che S_*^1 si mantiene costante lungo ciascuna traiettoria dell'assegnato moto base, consente di determinare la forma della S_*^1 stessa una volta che se ne siano fissati i valori iniziali ed al contorno. Pertanto la S_*^1 deve ritenersi assegnata nelle prime due equazioni e ciò sta a significare che in generale il problema si riduce alla determinazione delle sole tre funzioni incognite u^1 , v^1 e a^1 , definite dalle prime tre equazioni (11).

— 3 —

Intendo studiare in particolare il caso in cui il moto base è uniforme. Se U , a^0 ed S_*^0 sono le determinazioni, tutte costanti, della velocità delle particelle, di quella del suono e di S_* , le equazioni che reggono il moto perturbato, nell'ordine di approssimazione detto in precedenza, sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1}{\partial t} + U \frac{\partial u^1}{\partial x} + M^0 \frac{\partial a^1}{\partial x} + N^0 \frac{\partial S_*^1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v^1}{\partial t} + U \frac{\partial v^1}{\partial x} + M^0 \frac{\partial a^1}{\partial y} + N^0 \frac{\partial S_*^1}{\partial y} &= 0 \\ 2 \left(\frac{\partial u^1}{\partial t} + U \frac{\partial a^1}{\partial x} \right) + (\gamma - 1) a^0 \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial S_*^1}{\partial t} + U \frac{\partial S_*^1}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Con la sostituzione di variabili di chiaro significato cinematico:

$$\xi = x - Ut$$

$$\eta = y$$

$$\tau = t$$

si ricava:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (M^0 a^1 + N^0 S_*^1) = 0 \\ \frac{\partial v^1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} (M^0 a^1 + N^0 S_*^1) = 0 \\ 2 \frac{\partial a^1}{\partial \tau} + (\gamma - 1) a^0 \left(\frac{\partial u^1}{\partial \xi} + \frac{\partial v^1}{\partial \eta} \right) = 0 \\ \frac{\partial S_*^1}{\partial \tau} = 0 \end{cases}$$

Innanzitutto si vede che S_*^1 non dipende dalla variabile τ e pertanto essa coincide con la sua determinazione iniziale. Eliminando u^1 e v^1 dalle prime tre equazioni si ottiene:

$$\frac{\partial^2 a^1}{\partial \tau^2} = \frac{\gamma - 1}{2} a^0 \Delta (M^0 a^1 + N^0 S_*^1) \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$$

da cui:

$$(13) \quad \frac{\partial^2 a^2}{\partial \tau^2} - a_*^{02} \Delta a^1 = \frac{\gamma - 1}{2} N^0 \Delta S_*^1$$

Il problema viene così condotto alla risoluzione di una equazione differenziale del tipo di D'ALEMBERT, non omogenea, nella funzione incognita a^1 . Le componenti della velocità di perturbazione u^1 e v^1 potranno poi ottenersi con una semplice quadratura.

Si vede, conformemente ai risultati riportati da K. O. FRIEDRICHS in una ormai classica Nota ⁵⁾, che nel caso di moto trasverso in esame la velocità di propagazione delle perturbazioni è data da:

$$a_*^0 = \sqrt{a^{02} + A^{02}}$$

che in questo caso di moto base uniforme non dipende dal posto.

Più in dettaglio il procedimento che si potrà seguire per risolvere questo problema è il seguente:

ricordando che nell'ordine di approssimazione fin qui adottato si ha:

$$a^1 = \frac{\gamma - 1}{2} a^0 \frac{\rho^0}{\rho^1} \quad \text{e} \quad S_*^1 = \frac{1}{\rho^0} (B^1 - S_*^0 \rho^1)$$

⁵⁾ K. O. FRIEDRICHS-H. KRANZER: «Nonlinear wave motion» (Notes on Magneto-Hydrodynamics, VIII, Inst. Math. Sciences, New York University, 1958).

la soluzione corrispondente ai dati iniziali:

$$B^1(\xi, \eta, 0) = f(\xi, \eta), \quad \rho^1(\xi, \eta, 0) = g(\xi, \eta)$$

(f e g funzioni assegnate) si otterrà cercando la soluzione dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 a^2}{\partial \tau^2} - a^{02} \Delta a^1 = \frac{\gamma - 1}{2} N^0 \Delta F(\xi, \eta)$$

[si è posto $F(\xi, \eta) = \frac{1}{\rho^0} (f - S_*^0 g)$] soddisfacente la condizione:

$$a^1(\xi, \eta, 0) = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{a^0}{\rho^0} g'(\xi, \eta).$$

Le espressioni di B^1 e di ρ^1 sono allora le seguenti:

$$B^1(\xi, \eta, \tau) = \rho^0 \left[F(\xi, \eta) + \frac{2}{\gamma - 1} S_*^0 \frac{a^1}{a^0} \right]$$

$$\rho^1(\xi, \eta, \tau) = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{\rho^0}{a^0} a^1$$

alle quali vanno associate:

$$u^1(\xi, \eta, \tau) = \int_0^\tau (M^0 a^1 + N S_*^1)_\xi d\tau + \mathcal{U}(\xi, \eta)$$

$$v^1(\xi, \eta, \tau) = \int_0^\tau (M^0 a^1 + N S_*^1)_\eta d\tau + \mathcal{V}(\xi, \eta)$$

dove $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ rappresentano ovviamente le determinazioni di u^1 e v^1 all'istante $\tau=0$.

Una soluzione particolare del sistema (12) si ha per $u^1=v^1=0$. Si ottiene:

$$\frac{\partial a^1}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial S_*^1}{\partial \tau} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (M^0 a^1 + N S_*^1) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (M^0 a^1 + N S_*^1) = 0;$$

e quindi:

$$(14) \quad a^1 = - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{A^{02} a^0}{S_*^0 a^{02}} S_*^1.$$

Ciò significa che può aversi un moto uniforme senza che sia tale il campo magnetico e la densità delle particelle ed anche questo fatto trova riscontro nell'aerodinamica dei gas ordinari in cui ad un medesimo moto **uniforme** possono corrispondere diverse distribuzioni dell'entropia e quindi della densità.

— Osservazione —

Senza entrare in merito al problema al contorno che qui non viene posto, si può osservare che la espressione (14) può essere utilizzata per risolvere il problema generale: detto infatti $\varphi(\xi, \eta, \tau)$ l'integrale generale della omogenea associata all'equazione (13), la soluzione richiesta sarà data da:

$$a^1 = \varphi(\xi, \eta, \tau) + \bar{a}^1$$

soddisfacente la condizione:

$$(*) \quad a^1(\xi, \eta, 0) = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{a^0}{\rho^0} g(\xi, \eta).$$

Ricordando allora che $M^0 \bar{a}^1 + N^0 S_*^1 = 0$ si avrà:

$$u^1 = \int_0^\tau M^0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} d\tau + \mathfrak{A}(\xi, \eta)$$

$$v^1 = \int_0^\tau M^0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} d\tau + \mathfrak{B}(\xi, \eta)$$

dove $\bar{\varphi}$ è naturalmente la espressione che si ottiene per φ una volta che sia soddisfatta la condizione (*).

RENDICONTI
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

A. MELIS - F. TESTA

**La riflessione di un'onda di rarefazione
su di una parete fissa**

(Estratto dal fasc. 3-4 Vol. XXXIX 1969)

BOLOGNA
Azzoguidi - Società Tipografica Editoriale
1969

LA RIFLESSIONE DI UN'ONDA DI RAREFAZIONE SU DI UNA PARETE FISSA

Nota (*) di A. MELIS e F. TESTA

SUNTO - Vedi n. 1.

1. Un gas perfetto ed ideale è contenuto in un tubo rettilineo terminato da una banda da una parete fissa e dall'altra da un pistone scorrevole a perfetta tenuta.

È noto che se il pistone viene posto in movimento in modo da allontanarsi dalla parete fissa, in seno al gas in quiete si propaga un'onda di rarefazione le cui modalità dipendono, oltre che dalla natura del gas, dalla legge oraria del moto del pistone. In particolare se questo si muove di moto uniforme (si deve allora pensare ad un brusco passaggio, nell'istante iniziale, dalla quiete al moto) l'onda che si genera è del tipo a centro, la cui rappresentazione analitica è particolarmente semplice.

Si vuole indagare sul movimento che anima il gas a partire dall'istante in cui il pistone vien posto in moto, tenendo conto che l'onda di rarefazione, raggiunto l'ostacolo costituito dalla parete, si riflette su di essa ed il movimento del gas, che nella prima fase era di onda semplice, viene notevolmente perturbato.

Questo problema, le cui applicazioni riguardano particolarmente la balistica interna e che presenta notevoli analogie con quello riguardante il funzionamento dei cosiddetti « pulsogetti », è stato trattato diffusamente da STANYUKOVICH⁽¹⁾. Questo Autore ha studiato il moto del gas utilizzando

(*) Presentata alla Redazione dal Prof. G. Aymerich il 24 giugno 1969.

⁽¹⁾ K. P. STANYUKOVICH: *Unsteady motion of continuous media*, pagg. 176-182 (Pergamon Press, Londra 1960). Sullo stesso argomento si veda anche: L. D. LANDAU - E. M. LIFSHITZ: *Fluid Mechanics*, pag. 386 e segg. (Pergamon Press, Londra 1959).

la soluzione generale di una equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali dedotta dalle equazioni del moto mediante una classica trasformazione di Legendre. Ha fissato particolarmente la propria attenzione sulla determinazione della linea oraria della testa dell'onda di rarefazione, individuandola in maniera rigorosa dopo la prima riflessione sulla parete; non ha invece espresso in modo esplicito la soluzione nei punti appartenenti alla zona di penetrazione.

Nella presente Nota invece il movimento causato dalla riflessione dell'onda di rarefazione sulla parete viene studiato pensandolo come dovuto alla penetrazione nell'onda incidente di un'altra onda, simmetrica rispetto alla parete, propagantesi in verso opposto. Questo criterio, che sembra fisicamente più significativo, fa ritrovare, fra l'altro, tutti i risultati ottenuti da STANYUKOVICH e consente di suggerire un metodo numerico per la determinazione della soluzione in ogni punto della zona di penetrazione; inoltre lascia intravedere procedimenti, almeno approssimati, che si possono seguire qualora la riflessione avvenga su di una parete mobile.

Le riflessioni successive, sulla superficie del pistone mobile e su quella della parete, non vengono neanche qui prese in esame in quanto il loro studio sembra invero molto complesso. Si riesce tuttavia ad indicare un caso notevole in cui l'onda, dopo la prima riflessione sulla parete, non raggiunge il pistone e quindi si propaga indisturbata sempre nella medesima direzione.

2. Le equazioni che reggono il moto unidimensionale non stazionario di un gas perfetto, non viscoso e conduttore del calore, scritte in forma adimensionale, sono:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\gamma - 1} c \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

$$(2) \quad \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} \right) + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

In esse è: $x = \bar{x}/L$, $t = \bar{t}/T$, $u = \bar{u}/V$, $c = \bar{c}/V$, dove $\bar{x}$, $\bar{t}$, $\bar{u}$ e $\bar{c}$ sono rispettivamente la ascissa su di un asse diretto come il moto, la variabile tempo, la velocità del gas e quella locale del suono; L , T , e V sono grandezze di riferimento omogenee con i numeratori delle frazioni in cui esse figurano per cui x , t , u e c sono grandezze adimensionali. Poichè, per quanto si dirà in seguito, conviene scegliere come grandezze caratteristiche del fenomeno la pressione p_0 e la densità ρ_0 del gas all'istante iniziale ed il tempo t_0 che l'onda di rare-

fazione impiega a raggiungere la parete fissa, conviene assumere:

$$T = t_0, \quad V = (p_0/\rho_0)^{1/2}, \quad L = t_0(p_0/\rho_0)^{1/2}.$$

Si è supposto poi, come sembra naturale, che il comportamento termodinamico del gas sia adiabatico per cui, indicate con p e ρ la pressione e la densità adimensionali, valgono le relazioni:

$$(3) \quad p = \rho^\gamma; \quad c = \sqrt{dp/d\rho} = \sqrt{\gamma p/\rho}$$

con γ esponente adiabatico, per sua natura adimensionale. Dalle (1) e (2), una prima volta sommando membro a membro ed una seconda sottraendo, si ricava:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(u + \frac{2}{\gamma-1} c \right) = 0;$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(u - \frac{2}{\gamma-1} c \right) = 0.$$

Se si interpretano gli operatori differenziali fra parentesi quadre come derivazione rispetto al tempo effettuata da due osservatori che rispettivamente si muovono con velocità $u+c$ ed $u-c$, si può dire che per il primo di questi si mantiene costante l'espressione $u + \frac{2}{\gamma-1} c$, per il secondo l'altra espressione $u - \frac{2}{\gamma-1} c$.

In altri termini a ciascuna linea C^+ di equazione $dx/dt = u+c$ compete un valore β della combinazione $u + \frac{2}{\gamma-1} c$, mentre ad ogni linea C^- di equazione $dx/dt = u-c$ si può associare biunivocamente il valore α che compete alla combinazione $u - \frac{2}{\gamma-1} c$. Come è noto infatti le C^+ e le C^- così introdotte sono le linee caratteristiche del sistema (1) e (2) ed α e β i relativi invarianti di RIEMANN⁽²⁾. Se uno di essi è costante, le soluzioni, che vengono dette onde semplici, rappresentano onde di rarefazione che si propagano in seno al gas. È su soluzioni di questo tipo che si deve ora fissare l'attenzione.

(2) R. COURANT - K. O. FRIEDRICH: *Supersonic flow and shock waves*, (Interscience Publishers, Inc. New York, 1948).

3. Posta l'origine 0 dell'asse x di riferimento sulla parete fissa ed orientato tale asse verso la regione occupata dal gas, siano rispettivamente l e W l'ascissa della posizione iniziale M e la velocità costante del pistone, entrambe positive.

Le condizioni ai limiti suggerite dal problema sono:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & \text{per } t=0 \quad u=0, \quad p=1, \quad \rho=1 \quad \text{in } 0 \leq x \leq l \\ \text{II)} & \text{per } t>0 \quad u=W \quad \text{in } x=Wt+l \end{array}$$

insieme con:

$$\text{III)} \quad \text{per } t>0 \quad u=0 \quad \text{in } x=0.$$

La soluzione delle (1) e (2) che si adatta alle suddette condizioni ai limiti, ad esclusione della III, è un'onda semplice le cui caratteristiche rettilinee C^- costituiscono un fascio di rette con centro in M :

$$x-l=m^-t,$$

con $m^- = u - c$.

Vale l'integrale primo del moto:

$$(4) \quad u + \frac{2}{\gamma-1}c = \beta = \frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma}$$

in cui la costante all'ultimo membro è ottenuta tenendo conto delle condizioni I.

La soluzione cercata è allora:

$$(5) \quad u = \frac{2}{\gamma+1}(m^- + \sqrt{\gamma});$$

$$(6) \quad c = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma} - m^- \right)$$

dove $m^- = \frac{x-l}{t}$ varia fra i due valori estremi:

$$m_{**}^- = -\sqrt{\gamma}, \quad m_{**}^- = \frac{\gamma+1}{2}W - \sqrt{\gamma}$$

che rappresentano rispettivamente la velocità della « testa » e della « coda » dell'onda di rarefazione. Il primo di tali valori è stato ricavato osservando che, dove $u=0$, è $p=1$ e quindi $c=\sqrt{\gamma}$, il secondo che le particelle a con-

tatto col pistone posseggono la velocità W . In base a ciò e ricordando che è stato assunto come unitario il tempo impiegato dalla testa dell'onda a raggiungere la parete, si ottiene anche $l = \sqrt{\gamma}$. Come è stato già notato alla fine del § 2 è poi possibile associare a ciascuna retta caratteristica C^- , e quindi ad ogni valore di m^- , il valore α che su di essa assume la combinazione $u - \frac{2}{\gamma-1}c$. Si ha:

$$(7) \quad \alpha = \frac{2}{\gamma+1} \left(2m^- - \frac{3-\gamma}{\gamma-1} \sqrt{\gamma} \right)$$

variabile fra $\alpha_* = -\frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}$ ed $\alpha_{**} = 2W - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}$, determinazioni che competono ad α in corrispondenza a m_*^- e m_{**}^- .

Poichè

$$m_{**}^- - m_*^- = \frac{\gamma+1}{2} W,$$

la regione angolare racchiusa dalle due rette caratteristiche estreme è tanto più ampia quanto maggiore è la velocità W del pistone. In corrispondenza alla « velocità di fuga » W^* , oltre la quale il gas si distacca dal pistone stesso, la coda dell'onda si mantiene sempre a contatto col pistone per cui la linea oraria del moto di questo si sovrappone alla caratteristica di coefficiente angolare m_{**}^- . Infatti, per la (4), è:

$$W^* = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma}$$

e sostituendo nella espressione di m_{**}^- si ricava:

$$m_{**}^- = \frac{\gamma+1}{2} W^* - \sqrt{\gamma} = W^*.$$

4. Per ottenere una soluzione che soddisfi, oltre che le condizioni ai limiti I e II, anche la III esprimente il perpetuo annullamento della velocità del gas sulla parete fissa, si pensi per un momento che la parete rigida venga a mancare e che il tubo si estenda anche nel verso negativo dell'asse x . Se contemporaneamente alla prima un'altra onda di rarefazione, di modalità analoghe, si propagasse nel gas in senso opposto con sorgente situata a distanza $-l$ dalla origine 0, il movimento che così si produrrebbe nel gas verificherebbe ancora la I e II delle condizioni richieste e, data la sua regolarità e la sua

simmetria rispetto all'origine, anche la III. Ciò vuol dire che il movimento del gas dovuto alla prima riflessione dell'onda di rarefazione sulla parete rigida si può studiare come dovuto alla penetrazione nell'onda incidente di un'altra, di modalità identiche, ad essa simmetrica. Questa è così caratterizzata: le linee C^+ sono le rette di equazione:

$$x+l=m^+t$$

con $m^+=u+c$; poichè vale l'integrale primo:

$$(4') \quad u - \frac{2}{\gamma-1}c = \alpha = -\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma}$$

le espressioni di u e c in funzione di m^+ sono:

$$(5') \quad u = \frac{2}{\gamma+1}(m^+ - \sqrt{\gamma})$$

$$(6') \quad c = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma} + m^+ \right)$$

con $m^+ = \frac{x+l}{t}$ variabile fra i valori estremi:

$$m_*^+ = \sqrt{\gamma}, \quad m_{**}^+ = \sqrt{\gamma} - \frac{\gamma+1}{2}W.$$

Infine il valore β che su ciascuna C^+ assume la espressione $u + \frac{2}{\gamma+1}c$ è dato da:

$$(7') \quad \beta = \frac{2}{\gamma+1} \left(2m^+ + \frac{3-\gamma}{\gamma-1} \sqrt{\gamma} \right)$$

5. La « testa » dell'onda incidente raggiunge la parete fissa nell'istante $t=1$ e le (5) e (6) rappresentano la soluzione fino a questo istante. Per trovare la soluzione valida per $t>1$ si suggerisce qui un metodo numerico basato sulla costruzione delle linee caratteristiche nella zona di penetrazione e sulla determinazione della u e della c nei nodi del reticolo da esse formato⁽³⁾.

⁽³⁾ Sul metodo numerico qui adottato si veda, ad es., R. SAUER: *Ecoulements des Fluides compressibles*, (Libr. Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1951).

Nel seguito si useranno le seguenti notazioni: si indicherà con C_h^+ la linea caratteristica individuata dal valore β_h , con C_k^- quella individuata da α_k , con $M_{h,k}$ il punto intersezione della C_h^+ con la C_k^- ed infine con $m_{h,k}^-$ ed $m_{h,k}^+$ i coefficienti angolari, in $M_{h,k}$, delle due caratteristiche C_h^+ e C_k^- .

Si intende che α e β sono i parametri che verranno utilizzati come variabili indipendenti che, nel corso del calcolo numerico, verranno assegnati in progressione aritmetica; ossia:

$$\alpha_k = \alpha_* + k \Delta \alpha \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

$$\beta_h = \beta_* + h \Delta \beta \quad (h=0, 1, 2, \dots, n)$$

con $\Delta \alpha = \frac{\alpha_{**} - \alpha_*}{n}$ e dove, in virtù della simmetria della soluzione rispetto all'origine, deve porsi: $\Delta \beta = -\Delta \alpha$. Si deve innanzitutto determinare la linea oraria della testa dell'onda riflessa, ossia la caratteristica C_0^+ della zona di penetrazione.

Per dare delle formule che consentano di calcolare numericamente le coordinate del punto $M_{0,1}$ della C_0^+ , appartenente anche alla C_1^- , si può procedere come segue: detti β_0 ed α_1 i valori di β ed α corrispondenti rispettivamente alla C_0^+ ed alla C_1^- , le determinazioni di u e c in $M_{0,1}$ sono:

$$u_{0,1} = \frac{1}{2} (\beta_0 + \alpha_1)$$

$$c_{0,1} = \frac{\gamma - 1}{4} (\beta_0 - \alpha_1)$$

per cui:

$$m_{0,1}^+ = \frac{1}{4} [(\gamma + 1)\beta_0 + (3 - \gamma)\alpha_1]$$

Il punto $M_{0,1}$ viene allora determinato come intersezione della retta di coefficiente angolare $m_{0,1}^+$ uscente dal punto $M_{0,0} \equiv (x_{0,0}=0, t_{0,0}=l/\sqrt{\gamma})$, con la retta C_1^- il cui coefficiente angolare, in virtù della (7), è dato da:

$$m_1^- = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \alpha_1 + \frac{3 - \gamma}{\gamma - 1} \sqrt{\gamma} \right).$$

Si ottiene:

$$x_{0,1} = m_1^- \frac{l + m_{0,1}^+ t_{0,0} - x_{0,0}}{m_{0,1}^+ - m_1^-} + l$$

$$t_{0,1} = \frac{l + m_{0,1}^+ t_{0,0} - x_{0,0}}{m_{0,1}^+ - m_1^-}$$

In modo analogo, partendo da $M_{0,1}$, si può determinare $M_{0,2}$ e così via fino a costruire per punti, come si voleva, la C_0^+ . Il suo generico punto $M_{0,k}$ ha le coordinate:

$$(8) \quad \begin{aligned} x_{0,k} &= m_k^- \frac{m_{0,k}^+ t_{0,k-1} + l - x_{0,k-1}}{m_{0,k}^+ - m_k^-} + l \\ t_{0,k} &= \frac{m_{0,k}^+ t_{0,k-1} + l - x_{0,k-1}}{m_{0,k}^+ - m_k^-} \end{aligned}$$

dove:

$$(9) \quad \begin{aligned} m_{0,k}^+ &= \frac{1}{4} [(1+\gamma)\beta_0 + (3-\gamma)\alpha_k], \\ m_k^- &= \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma+1}{2} \alpha_k + \frac{3-\gamma}{\gamma-1} \sqrt{\gamma} \right) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Naturalmente la spezzata che così si ottiene approssima tanto meglio la C_0^+ quanto più grande è il numero n di intervalli in cui viene diviso $\alpha_{**} - \alpha_*$.

Le determinazioni di u e c in $M_{0,k}$ sono poi:

$$(10) \quad \begin{aligned} m_{0,k} &= \frac{1}{2} (\beta_0 + \alpha_k) \\ c_{0,k} &= \frac{\gamma-1}{4} (\beta_0 - \alpha_k) \end{aligned}$$

le quali forniscono, a parte un cambiamento di segno nella espressione di $u_{0,k}$, i valori di u e c anche nel punto $M_{k,0}$ della C_0^- simmetrica della C_0^+ .

Le formule (8) sono state trovate facendo uso delle (5), (6) e (7), ossia usufruendo della soluzione nella regione di onda semplice che ha per confine la C_0^+ . Per determinare le successive caratteristiche e quindi il reticolo da esse formato si può procedere con criterio analogo a quello già esposto, utilizzando però, in luogo delle (5), (6) e (7), le formule approssimate (8), (9) e (10) e quelle che ne prendono il posto via via che si procede nel calcolo. Si ottengono, in corrispondenza al generico nodo $M_{h,k}$ le seguenti

formule risolutive:

$$u_{h,k} = \frac{1}{2} (\beta_h + \alpha_k)$$

$$c_{h,k} = \frac{\gamma-1}{4} (\beta_h - \alpha_k)$$

$$x_{h,k} = m_{h,k}^+ (t_{h,k} - t_{h,k-1}) + x_{h,k-1}$$

$$t_{h,k} = \frac{m_{h,k}^+ t_{h,k-1} - m_{h,k}^- t_{h-1,k} - x_{h,k-1}}{m_{h,k}^+ - m_{h,k}^-}$$

dove

$$m_{h,k}^+ = \frac{1}{4} [(1+\gamma)\beta_h + (3-\gamma)\alpha_k]$$

$$m_{h,k}^- = \frac{1}{4} [(3-\gamma)\beta_h + (1+\gamma)\alpha_k].$$

Si possono fare le due seguenti osservazioni:

I) nelle formule precedenti è possibile far comparire unicamente il parametro α nelle sue determinazioni α_h ed α_k , tenendo conto che $\beta_k = -\alpha_k$;

II) la soluzione, come il lettore può facilmente verificare, si può scrivere facendo comparire soltanto le determinazioni di tutte le grandezze nei nodi $M_{h,k}$ per i quali è $h \leq k$, ossia nei punti di ascissa non negativa.

6. Le figure (1) e (2) illustrano i risultati che si sono ottenuti applicando il metodo ora indicato, avendo scelto $\gamma=1,4$ (aria).

La fig. 1 risulta dall'aver supposto $W=1$. In essa la retta segnata a tratto più marcato rappresenta la linea oraria del moto del pistone. L'istante τ in cui il fronte della onda riflessa raggiunge il pistone è dato da $\tau=2,16$. In corrispondenza alla zona (A) si ha la quiete, la zona triangolare (B) rappresenta l'onda di rarefazione, la regione (C) corrisponde a moto uniforme con velocità delle particelle uguale a quella del pistone (onda stazionaria) ed infine la (D) rappresenta la zona di penetrazione. Essa invade tutta la regione $0 \leq x \leq l$, d'accordo col fatto che, se $W \geq \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} = 0,98601$, è $m_{**}^- \geq 0$. Nella regione angolare (E) delimitata dalla linea ondulata e dalla linea oraria

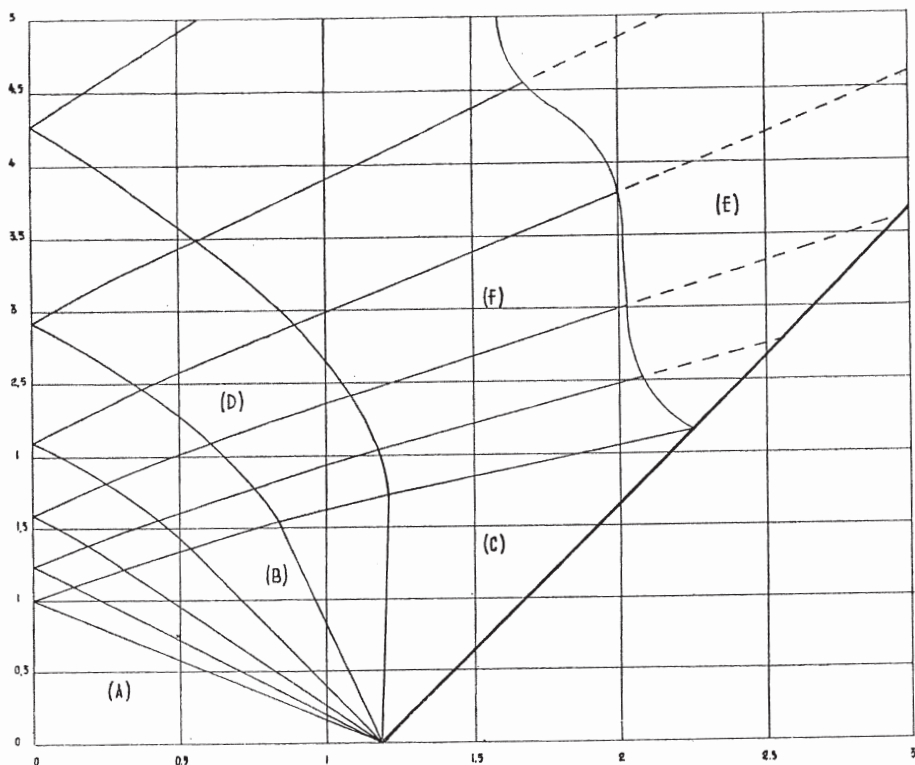


Fig. 1

del pistone la soluzione non è nota, verificandosi per $t=\tau$ una ulteriore riflessione sul pistone mobile dell'onda semplice (F).

La fig. 2 è stata ricavata supponendo che la velocità del pistone sia uguale a 5, cioè assai prossima alla velocità di fuga W^* che, nel nostro caso risulta uguale a 5,91. In essa non si notano più le zone analoghe alla (C) ed alla (E) della figura 1: la (C) non compare perchè, come si è già mostrato, per $W=W^*$ la coda dell'onda di rarefazione si mantiene sempre a contatto col pistone; la (E) sparisce in quanto in questo caso l'onda riflessa non raggiunge la superficie del pistone. Ciò perchè, per $W=W^*$, $m_{0,n}^+=W^*$. Infatti:

$$m_{0,n}^+ = \frac{1}{4} [(3-\gamma)\alpha_{**} - (1+\gamma)\alpha_*] = \frac{1}{2} [(3-\gamma)W + 2\sqrt{\gamma}]$$

e quindi:

$$\lim_{W \rightarrow W^*} m_{0,n}^+ = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} = W^*.$$

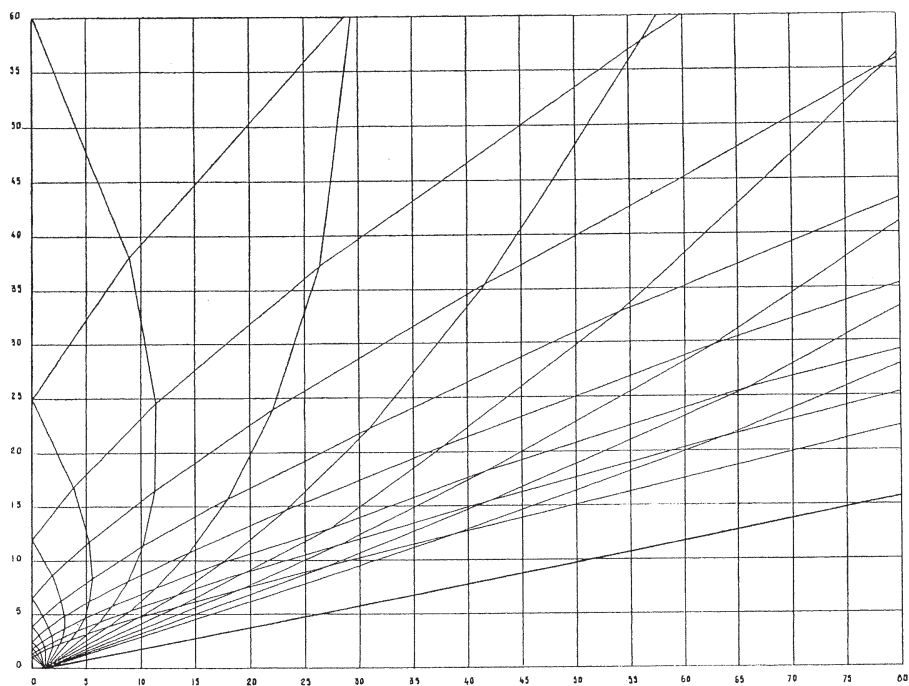


Fig. 2

RENDICONTI
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

ANTONIO MELIS - BENEDETTO PIRAS

**Su alcuni movimenti di un ellissoide rotondo
con cavità
completamente riempita di liquido**

(Estratto dal fasc. 3-4 Vol. XLII 1972)

BOLOGNA
Azzoguidi - Società Tipografica Editoriale
1972

SU ALCUNI MOVIMENTI DI UN ELLISSOIDE ROTONDO CON CAVITÀ COMPLETAMENTE RIEMPITA DI LIQUIDO

Nota (*) di ANTONIO MELIS e BENEDETTO PIRAS (**)

SUNTO - Si formula il problema generale, di interesse geofisico, del moto rispetto al baricentro di un corpo ellissoidico con una cavità completamente riempita di liquido. Ci si sofferma in particolare su di un caso significativo in cui si riscontrano, tra i movimenti possibili, precessioni regolari.

SUMMARY - The general problem is formulated of the relative motion about the mass center of an ellipsoidal rigid body containing a fluid in a cavity. Particularly, between all possible motions, regular precessions are studied, which have interesting geophysical applications.

1. Nello studio del moto della Terra, in particolare della sua precessione e delle relative nutazioni, si è condotti ad analizzare i possibili moti di alcuni modelli di corpi non omogenei, la cui distribuzione materiale è suggerita dalle attuali conoscenze della geofisica. Un modello possibile è quello costituito, grosso modo, da due parti: l'una, detta nucleo, di forma ellissoidica, che si estende dal centro fino a circa 3500 chilometri e che, a parte un nodo centrale solido, ha un comportamento analogo a quello di un liquido nel senso che attraverso di essa non si trasmettono le onde sismiche trasversali; l'altra, il mantello, che si estende fino alla superficie, il cui comportamento è invece simile a quello di un involucro solido¹⁾.

VOLTERRA, in una serie di Note i cui risultati sono stati poi da lui stesso

(*) Presentata alla Redazione dal Prof. G. AYMERICH il 16-2-1972.

(**) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le Applicazioni della Matematica alla Fisica ed alla Ingegneria.

¹⁾ Vedi ad esempio: H. JEFFREYS: *The Earth*. (Cambridge University Press, 1970).

raccolti in una classica Memoria²⁾, ha studiato gli effetti prodotti da moti interni di parti rigide sulla rotazione libera o forzata di un corpo solido, sviluppando anche le teorie rivolte ad interpretare il moto del polo terrestre e la conseguente variazione delle latitudini.

Recentemente MOISEYEV e RUMYANTSEV³⁾ hanno affrontato problemi riguardanti il moto di corpi con cavità riempite totalmente o parzialmente di liquido, allo scopo di trarre indicazioni sul comportamento di sistemi meccanici con serbatoi di carburante. Hanno rivolto in particolare i loro studi alla ricerca di criteri di stabilità per alcuni movimenti particolari.

In questa Nota, seguendo l'impostazione generale di VOLTERRA ed utilizzando i procedimenti seguiti da MOISEYEV e RUMYANTSEV, ci proponiamo di studiare movimenti di un corpo di forma ellissoidica costituito da un involucro rigido riempito completamente con un liquido non viscoso, caratterizzando, quando possibile, le forze esterne che li provocano, a prescindere dal moto del baricentro del sistema. Ci riserviamo di confrontare successivamente i risultati qui ottenuti con quelli cui sono pervenuti altri Autori in riferimento al problema del moto della Terra. Ciò anche in vista di ulteriori ricerche che intendiamo condurre su tale argomento.

2. Volendo studiare, come abbiamo detto nel paragrafo 1, il moto rispetto al baricentro di un sistema materiale costituito da un involucro rigido compreso fra due ellissoidi omotetici la cui cavità sia riempita completamente di liquido⁴⁾, dobbiamo utilizzare, insieme con il teorema del momento delle quantità di moto, le equazioni suggerite dalla meccanica dei fluidi incompressibili non viscosi. Indichiamo con $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ la velocità angolare dell'involucro, con $\vec{n}$ il versore della normale esterna alla parete Σ della cavità e con $\vec{r}$ il vettore di posizione spiccato dal baricentro G . Se il moto del liquido fosse irrotazionale con potenziale di velocità φ , tenendo conto che su Σ deve essere:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \vec{\omega} \times \vec{r} \cdot \vec{n}$$

²⁾ V. VOLTERRA: *Conférences sur quelques questions de mécanique et de physique mathématique. Rotations des corps dans lesquels existent des mouvements internes*. (Gauthier Villars, Parigi 1938).

³⁾ N. N. MOISEYEV - V. V. RUMYANTSEV: *Dynamic stability of bodies containing fluid* (Springer Verlag, New York 1968).

⁴⁾ Questa circostanza fa sì che la distribuzione delle masse non venga modificata dal moto relativo del liquido, per cui il baricentro del sistema occupa sempre la stessa posizione rispetto all'involucro ed i momenti principali d'inerzia del sistema stesso, calcolati rispetto al baricentro, rimangono inalterati.

si avrebbe ⁵⁾:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \omega_1 yz + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \omega_2 zx + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \omega_3 xy$$

dove a , b e c sono le lunghezze dei semiassi della cavità ed x , y e z le coordinate della generica particella rispetto ad un sistema di riferimento con origine in G e coincidente con gli assi principali d'inerzia.

Se invece la velocità $\bar{v}$ del fluido è data da:

$$(1) \quad \bar{v} = \text{grad} \Phi + \bar{\Omega} \times \bar{r}$$

con $\Phi = \Phi(x, y, z; t)$ e $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}(t)$ ⁶⁾, la condizione su Σ diventa:

$$\frac{d\Phi}{dn} = (\bar{\omega} - \bar{\Omega}) \times \bar{r} \cdot \bar{n}$$

per cui:

$$(2) \quad \Phi(x, y, z; t) = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} (\omega_1 - \Omega_1) yz + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} (\omega_2 - \Omega_2) zx + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (\omega_3 - \Omega_3) xy.$$

In questo lavoro, conformemente a quanto suggeriscono gli Autori citati nella nota (3), prenderemo in considerazione soltanto moti di questo tipo. Si può sin d'ora notare che, data la rotazionalità del moto, se tutte le forze che agiscono sul fluido sono conservative vale, per il vettore $\bar{\Omega}$, la seguente equazione di Helmholtz:

$$(3) \quad \dot{\bar{\Omega}} + \text{rot}(\bar{\Omega} \times \bar{v}) = 0$$

esprimente la ben nota proprietà che le linee vorticosi sono costituite sempre dalle medesime particelle fluide.

Tenendo conto delle (1) e (2) si dimostra che il momento $\bar{K}$ delle quantità di moto del sistema, calcolato rispetto al baricentro G , è dato da:

$$(4) \quad \bar{K} = (\theta_1 + \theta^*) \bar{\omega} + (\theta_2 - \theta^*) \bar{\Omega}$$

dove:

θ_1 = tensore d'inerzia dell'involucro rigido, di componenti principali A_1 , B_1 e C_1 ;

⁵⁾ Per quanto esposto in questo paragrafo si veda il testo citato nella nota (3).

⁶⁾ Un tale moto viene detto da MOISEYEV e RUMYANTSEV vorticoso omogeneo in quanto il vettore $\text{rot} \bar{v} = 2\bar{\Omega}$ dipende soltanto dal tempo, ma è lo stesso per tutte le particelle

θ_2 = tensore d'inerzia della massa fluida M_2 , di componenti principali A_2 , B_2 e C_2 ;

θ^* = tensore (del « corpo solido equivalente ») di componenti:

$$(5) \quad \theta_{11}^* = \frac{M_2}{5} \frac{(b^2 - c^2)^2}{b^2 + c^2}; \quad \theta_{33}^* = \frac{M_2}{5} \frac{(c^2 - a^2)^2}{c^2 + a^2}; \quad \theta_{22}^* = \frac{M_2}{5} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}$$

$$\theta_{ij}^* = 0 \quad (i \neq j; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3).$$

Detto $\overline{M}_e$ il momento rispetto a G delle forze attive esterne vale allora la equazione:

$$\dot{\overline{K}} = \overline{M}_e$$

per cui si ottiene:

$$(6) \quad (\theta_1 + \theta^*) \frac{d\overline{\omega}}{dt} + (\theta_2 - \theta^*) \frac{d\overline{\Omega}}{dt} + \overline{\omega} \times [(\theta_1 + \theta^*)\overline{\omega} + (\theta_2 - \theta^*)\overline{\Omega}] = \overline{M}_e$$

dove ora le derivate temporali sono calcolate rispetto al sistema solidale degli assi principali d'inerzia.

È sulle equazioni (3) e (6) che d'ora in avanti fisseremo la nostra attenzione.

3. Riteniamo conveniente, anche in vista di una eventuale applicazione ai problemi di geofisica cui si è accennato all'inizio di questa Nota, decomporre il vettore $\overline{\Omega}$, che rappresenta la « vorticità » del fluido, nel modo seguente:

$$(7) \quad \overline{\Omega} = \overline{\omega} + \overline{\eta}$$

dove il vettore η così introdotto è la « vorticità » del liquido relativa all'involucro.

Con la sostituzione (7) la (4) diventa:

$$\overline{K} = \theta \overline{\omega} + (\theta_2 - \theta^*) \overline{\eta}$$

in cui $\theta = \theta_1 + \theta_2$ è il tensore d'inerzia del sistema complessivo, mentre la (2) porge:

$$(2') \quad \Phi(x, y, z; t) = - \left[\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \eta_1 y z + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \eta_2 z x + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \eta_3 x y \right].$$

Le equazioni (3) e (6) assumono così la nuova forma:

$$(3') \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\eta} + \text{rot} [(\bar{\omega} + \bar{\eta}) \times \bar{v}] = 0$$

$$(6') \quad \theta \frac{d\bar{\omega}}{dt} + (\theta_2 - \theta^*) \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \bar{\omega} \times [\theta \bar{\omega} + (\theta_2 - \theta^*) \bar{\eta}] = \bar{M}_e$$

dove ora, come nella (6'), anche nella (3') figurano le derivate rispetto al sistema di riferimento solidale con la crosta.

Proiettando ambo i membri delle equazioni precedenti sugli assi principali d'inerzia e tenendo conto della (1) e della (2') si ottengono le sei equazioni scalari:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{2a^2}{a^2+c^2} \omega_3\eta_2 - \frac{2a^2}{a^2+b^2} \omega_2\eta_3 - \frac{2a^2(c^2-b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \eta_2\eta_3 \\ \frac{d\omega_2}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} = \frac{2b^2}{b^2+a^2} \omega_1\eta_3 - \frac{2b^2}{b^2+c^2} \omega_3\eta_1 - \frac{2b^2(a^2-c^2)}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)} \eta_3\eta_1 \\ \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} = \frac{2c^2}{c^2+b^2} \omega_2\eta_1 - \frac{2c^2}{c^2+a^2} \omega_1\eta_2 - \frac{2c^2(b^2-a^2)}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)} \eta_1\eta_2 \\ A \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{4}{5} M_2 \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} \frac{d\eta_1}{dt} + (C-B)\omega_2\omega_3 + \\ \quad + \frac{4}{5} M_2 \left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \omega_2\eta_3 - \frac{c^2a^2}{c^2+a^2} \omega_3\eta_2 \right) = L \\ B \frac{d\omega_2}{dt} + \frac{4}{5} M_2 \frac{c^2a^2}{c^2+a^2} \frac{d\eta_2}{dt} + (A-C)\omega_3\omega_1 + \\ \quad + \frac{4}{5} M_2 \left(\frac{b^2c^2}{b^2+c^2} \omega_3\eta_1 - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \omega_1\eta_3 \right) = M \\ C \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{4}{5} M_2 \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \frac{d\eta_3}{dt} + (B-A)\omega_1\omega_2 + \\ \quad + \frac{4}{5} M_2 \left(\frac{c^2a^2}{c^2+a^2} \omega_1\eta_2 - \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} \omega_2\eta_1 \right) = N \end{array} \right.$$

nelle quali A , B e C sono i momenti principali d'inerzia di tutto il sistema come rigido ed L , M ed N rappresentano le componenti del momento risultante delle forze attive esterne rispetto al baricentro.

Si può subito osservare che se $a=b=c$ ed $A=B=C$ (simmetria sferica)

dalle prime tre delle (8) si ricava:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\eta} = 0$$

ossia:

$$\dot{\bar{\omega}} + \dot{\bar{\eta}} = 0$$

Poichè risulta:

$$\Phi = 0$$

si ottiene, da (1):

$$\bar{\nu} = \bar{\Omega} \times \bar{r};$$

il liquido si muove come una sfera rigida di moto rotatorio uniforme intorno ad un asse per il centro. Dalle rimanenti equazioni si ricava poi, con semplici sostituzioni:

$$A_1 \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{M}_e;$$

il moto dell'involucro che, come prevedibile, non viene influenzato da quello del liquido, è quello di una sfera rigida fissata nel centro e soggetta alle forze esterne di momento $\bar{M}_e$.

4. Fino a quando non si precisa la natura delle forze agenti e quindi l'espressione del loro momento $\bar{M}_e$, è ovviamente impossibile dedurre, dall'esame delle equazioni (8) anche soltanto alcuni caratteri del movimento. Poichè d'altra parte, anche specificando il tipo delle forze, il problema, se non si introduce qualche ipotesi semplificativa, si presenta estremamente complesso, ci limiteremo per il seguito a considerare il caso particolare, ma molto significativo, in cui il sistema materiale presenti simmetria di rotazione, ad esempio rispetto all'asse z . Ponendo $A=B$ ed $a=b$ si ottiene allora:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{2a^2}{a^2+c^2} \omega_3\eta_2 - \omega_2\eta_3 - \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2} \eta_2\eta_3 \\ \text{II)} \quad \frac{d\omega_2}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{2a^2}{a^2+c^2} \omega_3\eta_1 + \omega_1\eta_3 + \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2} \eta_1\eta_3 \\ \text{III)} \quad \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} = \frac{2c^2}{a^2+c^2} (\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2) \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \begin{cases} \text{IV)} & A \frac{d\omega_1}{dt} + P \frac{d\eta_1}{dt} + (C-A)\omega_2\omega_3 + Q\omega_2\eta_3 - P\omega_3\eta_2 = L \\ \text{V)} & A \frac{d\omega_2}{dt} + P \frac{d\eta_2}{dt} - (C-A)\omega_3\omega_1 - Q\omega_1\eta_3 + P\omega_3\eta_1 = M \\ \text{VI)} & C_1 \frac{d\omega_3}{dt} = N \end{cases} \quad \left(P = \frac{4}{5} M_2 \frac{a^2 c^2}{a^2 + c^2}; \quad Q = \frac{2}{5} M_2 a^2 \right)$$

dove l'ultima equazione, che mostra, come è ovvio, che la rotazione dell'involucro intorno all'asse di simmetria non risente della presenza del liquido, proviene da una combinazione della terza e della sesta equazione del sistema (8).

Introducendo l'ipotesi semplificativa $N=0$ ⁷⁾, dalla sesta equazione risulta $\omega_3 = \text{cost.}$

Se vogliamo, conformemente a quanto suggerito da altri Autori che si sono occupati del problema del moto della Terra (si veda ancora il lavoro citato nella nota (7)) che anche η_3 risulti costante si dovrà imporre, per la terza del sistema (9), l'ulteriore condizione:

$$\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = 0$$

R. O. VICENTE, nella Nota richiamata, ritiene soddisfatta tale condizione supponendo ω_1 , ω_2 , η_1 ed η_2 quantità piccole in modo che di esse si possano trascurare i prodotti. Osserviamo che la stessa può essere soddisfatta, senza fare alcuna ipotesi sull'ordine di grandezza delle quantità che in essa compaiono, semplicemente supponendo che risulti:

$$\eta_1 = \lambda \omega_1$$

$$\eta_2 = \lambda \omega_2$$

con λ funzione per ora arbitraria del tempo.

Ciò implica che le tre direzioni, uscenti da G , individuate dall'asse di simmetria z di versore $\vec{k}$ e dai vettori $\vec{\omega}$ ed $\vec{\Omega}$ appartengono ad un medesimo piano. Poichè inoltre è facile verificare che:

$$(\vec{K} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{k} = 0$$

⁷⁾ Ciò si verifica con buona approssimazione quando si studia il moto della Terra sotto l'azione simultanea del Sole e della Luna. Si veda per questo: R. O. VICENTE: *La précession-nutation et la structure de la Terre* (Ciel et Terre, Vol. 86, n. 3, 1970).

anche la direzione del momento delle quantità di moto appartiene a questo piano, conformemente a quanto accade nella precessione euleriana della Terra supposta rigida.

5. Indicati con $\bar{\eta}_e$ ed $\bar{\omega}_e$ i vettori componenti sul piano equatoriale di η ed ω risulta in ogni istante:

$$(10) \quad \bar{\eta}_e = \lambda \bar{\omega}_e.$$

Le equazioni del sistema (9) non ancora utilizzate assumono ora la seguente forma:

$$(11) \quad \begin{cases} (1+\lambda) \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_1 \frac{d\lambda}{dt} - \omega_2 \left(\frac{2a^2}{a^2+c^2} \omega_3 \lambda - \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2} \eta_3 \lambda - \eta_3 \right) = 0 \\ (1+\lambda) \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_2 \frac{d\lambda}{dt} + \omega_1 \left(\frac{2a^2}{a^2+c^2} \omega_3 \lambda - \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2} \eta_3 \lambda - \eta_3 \right) = 0 \\ (A+\lambda P) \frac{d\omega_1}{dt} + P\omega_1 \frac{d\lambda}{dt} + \omega_2 [(C-A)\omega_3 + Q\eta_3 - P\omega_3 \lambda] = L \\ (A+\lambda P) \frac{d\omega_2}{dt} + P\omega_2 \frac{d\lambda}{dt} - \omega_1 [(C-A)\omega_3 + Q\eta_3 - P\omega_3 \lambda] = M. \end{cases}$$

Nell'ipotesi in cui le forze esterne hanno momento nullo rispetto al baricentro ($L=M=0$) si può mostrare che, oltre le prevedibili rotazioni uniformi della crosta e del liquido intorno all'asse di simmetria

$$(\eta_1=\eta_2=\omega_1=\omega_2=0, \eta_3=\text{cost.}, \omega_3=\text{cost.}, \Phi=0),$$

i moti possibili della crosta sono di precessione.

Mostriamo innanzitutto che il parametro λ deve essere costante e radice reale dell'equazione di secondo grado:

$$(12) \quad \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2} P(\omega_3+\eta_3)\lambda^2 + \left[\left(C-P + \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2} A \right) \omega_3 + \right. \\ \left. + \left(Q-P - \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2} A \right) \eta_3 \right] \lambda + (C-A)\omega_3 + (Q-A)\eta_3 = 0.$$

Infatti, dal sistema (11), moltiplicando ambo i membri della seconda e della quarta equazione per l'immaginario i , sommandoli rispettivamente a quelli

della prima e della terza e introducendo la variabile complessa $\tilde{\omega} = \omega_1 + i\omega_2$ si ricava:

$$(1 + \lambda) \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + \tilde{\omega} \frac{d\lambda}{dt} + i\tilde{\omega} \left[\frac{2a^2}{a^2 + c^2} \omega_3 \lambda - \eta_3 - \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \lambda \eta_3 \right] = 0$$

$$(A + \lambda P) \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + P\tilde{\omega} \frac{d\lambda}{dt} - i\tilde{\omega} [(C - A)\omega_3 - P\omega_3 \lambda + Q\eta_3] = 0.$$

La compatibilità di queste equazioni richiede che sia:

$$(A - P) \frac{d\lambda}{dt} + i \left\{ \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} P(\omega_3 + \eta_3) \lambda^2 + \left[\left(C - P + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} A \right) \omega_3 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(Q - P - \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} A \right) \eta_3 \right] \lambda + (C - A)\omega_3 + (Q - A)\eta_3 \right\} = 0.$$

Pretendendo che λ sia reale deve essere allora: $\frac{d\lambda}{dt} = 0$, ossia $\lambda = \text{cost.}$ e l'annullarsi del coefficiente dell'immaginario i fornisce la (12).

Dalle equazioni del sistema (11) nelle quali si pensino sostituite, al posto di λ , le radici λ^* della (12), si ottiene:

$$(13) \quad \begin{cases} \omega_1 = \Gamma \cos(\gamma t + \varphi) \\ \omega_2 = \Gamma \sin(\gamma t + \varphi) \end{cases}$$

con Γ e φ costanti arbitrarie e

$$\gamma = \frac{(C - A)\omega_3 + Q\eta_3 - P\omega_3 \lambda^*}{A + \lambda^* P} = \frac{\eta_3 + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \eta_3 \lambda^* - \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \omega_3 \lambda^*}{1 + \lambda^*}$$

Le (13), insieme con $\omega_3 = \text{cost.}$, rappresentano un moto di precessione della crosta e si osserva che, naturalmente, la presenza del nucleo liquido modifica, rispetto al caso rigido, la velocità angolare intorno all'asse di figura. È opportuno anzi mostrare come, nell'ipotesi che η_3 sia trascurabile di fronte ad ω_3 e che la « eccentricità » del nucleo $\frac{C_2 - A_2}{C_2}$ si ritenga infinitesima del primo ordine rispetto all'eccentricità della Terra supposta omogenea (è chiaro che in tal caso deve abbandonarsi l'ipotesi di omotetia fra le superfici della crosta e della cavità) tale velocità viene accresciuta. Infatti, in questo ordine di approssimazione, la (12) diventa:

$$\frac{M_2}{5} (a^2 - c^2) \lambda^2 + C_1 \lambda + (C - A) = 0$$

la quale fornisce:

$$\lambda_{1,2}^* = \frac{-C_1 \pm C_1 \sqrt{1 - \frac{4M_2}{5C_1}(a^2 - c^2)(C - A)}}{\frac{2}{5}M_2(a^2 - c^2)} \cong \begin{cases} -\frac{C - A}{C_1} \\ -\frac{5C_1}{M_2(a^2 - c^2)} + \frac{C - A}{C_1} \cong -\frac{5C_1}{M_2(a^2 - c^2)} \end{cases}$$

Pertanto si ricavano per γ i due valori approssimati:

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1 \cong \frac{C - A}{A_1} \omega_3 \\ \gamma_2 \cong -\omega_3 \end{cases}$$

il primo dei quali attesta l'affermazione fatta mentre il secondo rappresenterebbe un piccolo spostamento nello spazio dell'asse di vorticità. Tale risultato è d'accordo con quello riferito da R. O. VICENTE nella Nota citata.

6. Se le forze esterne non hanno momento nullo rispetto agli assi x ed y , i risultati del paragrafo precedente vengono meno anche perchè ora non è più possibile dedurre che λ è necessariamente costante. Se però si introduce questa ipotesi⁸⁾, dalle prime due equazioni del sistema (11) si ricava:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Delta \cos(\delta t + \psi) \\ \omega_2 &= \Delta \sin(\delta t + \psi) \end{aligned} \quad \left[\begin{aligned} \delta &= \frac{\eta_3 + \left(\frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \eta_3 - \frac{2a^2}{c^2 + a^2} \omega_3 \right) \lambda}{1 + \lambda} \\ \Delta \text{ e } \psi &\text{ costanti} \end{aligned} \right]$$

che, insieme con $\omega_3 = \text{cost.}$, rappresentano ancora un movimento di precessione con asse individuato dal versore:

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + (\delta + \omega_3)^2}} (\bar{\omega} + \delta \bar{k})^9.$$

⁸⁾ È presumibile ad esempio che λ possa essere ritenuto tale, almeno in prima approssimazione, nelle equazioni (11), qualora L ed M non assumano valori rilevanti.

⁹⁾ Ciò discende dal fatto che le prime due equazioni sono formalmente identiche a quelle di Eulero che reggono il moto per inerzia di un giroscopio. D'altra parte si mostra facilmente che le suddette espressioni di ω_1 , ω_2 ed ω_3 soddisfano la condizione necessaria e sufficiente affinché il moto sia di precessione data da G. GRIOLI nella Nota: *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi* (Rend. Sc. fis. mat. e nat. dell'Accad. Naz. Lincei, vol. XXXIV, 1963, pp. 636-641).

Tale movimento è dinamicamente possibile solo se le componenti del momento rispetto a G delle forze esterne sono:

$$(14) \quad \begin{cases} L = -\Delta[(A + \lambda P)\delta - (C - A - P\lambda)\omega_3 - Q\eta_3] \sin(\delta t + \psi) \\ M = \Delta[(A + \lambda P)\delta - (C - A - P\lambda)\omega_3 - Q\eta_3] \cos(\delta t + \psi) \\ N = 0. \end{cases}$$

Una situazione del tipo di quella prospettata si presenta nello studio della precessione della Terra sotto l'azione simultanea della Luna e del Sole, nel qual caso L ed M con buona approssimazione ¹⁰⁾ si possono rappresentare come funzioni sinusoidali del tempo con ampiezza, fase iniziale e periodo dati dalla osservazione:

$$L = \mu \cos(\sigma t + \nu) \quad M = \mu \sin(\sigma t + \nu).$$

Identificando queste ultime espressioni con quelle date dalle formule (14) è possibile allora ricavare il relativo valore del parametro λ ed ottenere tutti i caratteri della precessione.

¹⁰⁾ Si veda, fra gli altri, J. M. A. DANBY: *Fundamentals of celestial mechanics*, p. 296 e segg. (MacMillan Comp., New York, 1962).

RENDICONTI
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

A. MELIS - B. PIRAS

**Sul periodo della precessione Euleriana
della terra secondo il modello di Kelvin**

(Estratto dal fasc. 1-2 Vol. XLIII 1973)

BOLOGNA
graficoop - Società Tipografica Editoriale
1973

SUL PERIODO DELLA PRECESSIONE EULERIANA DELLA TERRA SECONDO IL MODELLO DI KELVIN

Nota (*) di A. MELIS e B. PIRAS ¹⁾

1. In un recente lavoro ²⁾ abbiamo preso in esame il problema del moto di un sistema materiale costituito da un involucro rigido compreso fra due ellissoidi coassiali la cui cavità sia completamente riempita di liquido non viscoso, con lo scopo di farne applicazione allo studio del moto della Terra. Riprendiamo ora lo stesso problema limitando la ricerca all'ipotesi, particolarmente significativa nel caso geodinamico, che il sistema possieda simmetria di rotazione rispetto ad un asse. Intendiamo approfondire innanzitutto i risultati già in parte conseguiti e studiare poi, utilizzando dati numerici relativi alla Terra, le precessioni per inerzia relative al baricentro. Anche se, come è noto, col modello da noi preso in esame vengono trascurati tutti gli effetti dovuti all'elasticità del mantello, alla presenza di masse liquide sulla sua superficie, alla viscosità del nucleo, ecc., la scelta di un modello così semplificato consente di mettere in evidenza come il periodo di tali precessioni viene influenzato sia dalla vorticità del fluido che dalla eccentricità della cavità.

2. Rimandando, per quanto riguarda il significato dei simboli che adotteremo, alla Nota precedentemente citata, scriviamo le equazioni che reggono il moto per inerzia, rispetto al baricentro, del sistema materiale in esame. Esse

(*) Presentata alla Redazione dal Prof. G. Aymerich l'11 novembre 1972.

¹⁾ Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per la fisica matematica e per le applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria.

²⁾ A. MELIS - B. PIRAS: *Su alcuni movimenti di un ellissoide rotondo con cavità completamente riempita di liquido* (Rend. Sem. Fac. Scienze Univ. Cagliari - Vol. XLII, fasc. 3/4, 1972).

sono:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{2a^2}{a^2+c^2} \omega_3 \eta_2 - \omega_2 \eta_3 + \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2} \eta_2 \eta_3 \\ \text{II)} \quad \frac{d\omega_2}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{2a^2}{a^2+c^2} \omega_3 \eta_1 + \omega_1 \eta_3 - \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2} \eta_1 \eta_3 \\ \text{III)} \quad \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} = \frac{2c^2}{a^2+c^2} (\omega_2 \eta_1 - \omega_1 \eta_2) \\ \text{IV)} \quad A \frac{d\omega_1}{dt} + P \frac{d\eta_1}{dt} + (C-A) \omega_2 \omega_3 + Q \omega_2 \eta_3 - P \omega_3 \eta_2 = 0 \\ \text{V)} \quad A \frac{d\omega_2}{dt} + P \frac{d\eta_2}{dt} - (C-A) \omega_1 \omega_3 - Q \omega_1 \eta_3 + P \omega_3 \eta_1 = 0 \\ \text{VI)} \quad C_1 \frac{d\omega_3}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

È facile mostrare che vale il seguente Teorema:

« Condizione necessaria e sufficiente affinché le (1) rappresentino un moto di precessione dell'involucro, è:

$$(2) \quad \overline{\eta_e} = \lambda \overline{\omega_e}$$

dove $\overline{\eta_e}$ ed $\overline{\omega_e}$ sono rispettivamente i vettori componenti, nel piano equatoriale, della vorticità relativa $\overline{\eta}$ del nucleo liquido e della velocità angolare $\overline{\omega}$ della parte rigida e dove λ è un fattore di proporzionalità costante ».

Infatti, osservato che per qualsiasi movimento del corpo si ha, per la VI delle (1),

$$\omega_3 = \text{cost},$$

se il moto dell'involucro è di precessione come nell'enunciato del teorema, le componenti di $\overline{\omega}$ sugli assi principali d'inerzia equatoriali sono date da:

$$\omega_1 = \Gamma \cos(\gamma t + \varphi)$$

$$\omega_2 = \Gamma \sin(\gamma t + \varphi)$$

con Γ , γ e φ costanti.

Sostituendo queste espressioni nelle equazioni del sistema (1) si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \gamma\omega_2 + \frac{2a^2}{a^2+c^2}\omega_3\eta_2 - \omega_2\eta_3 + \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\eta_2\eta_3 \\ \text{II)} \quad \frac{d\eta_2}{dt} = -\gamma\omega_1 - \frac{2a^2}{a^2+c^2}\omega_3\eta_1 + \omega_1\eta_3 - \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\eta_1\eta_3 \\ \text{III)} \quad \frac{d\eta_3}{dt} = \frac{2c^2}{a^2+c^2}(\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2) \\ \text{IV)} \quad P \frac{d\eta_1}{dt} = A\omega_2\gamma - (C-A)\omega_2\omega_3 - Q\omega_2\eta_3 + P\omega_3\eta_2 \\ \text{V)} \quad P \frac{d\eta_2}{dt} = -A\omega_1\gamma + (C-A)\omega_1\omega_3 + Q\omega_1\eta_3 - P\omega_3\eta_1. \end{array} \right.$$

Affinchè le relazioni I, II, IV e V siano compatibili è necessario che sia:

$$\begin{aligned} \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}P(\omega_3+\eta_3)\eta_1 &= [(P-Q)\eta_3 - (C-A)\omega_3 - (P-A)\gamma]\omega_1 \\ \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}P(\omega_3+\eta_3)\eta_2 &= [(P-Q)\eta_3 - (C-A)\omega_3 - (P-A)\gamma]\omega_2 \end{aligned}$$

cioè:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \lambda(\eta_3)\omega_1 \\ \eta_2 = \lambda(\eta_3)\omega_2. \end{array} \right.$$

Essendo poi per la III delle (1) ed in virtù delle (3) $\frac{d\eta_3}{dt} = 0$, η_3 e di conseguenza λ risultano costanti.

Viceversa, supposta verificata la (2), le prime cinque equazioni del sistema (1) diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad (1+\lambda)\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2 \left(\frac{2a^2}{a^2+c^2}\omega_3\lambda + \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\eta_3\lambda - \eta_3 \right) = 0 \\ \text{II)} \quad (1+\lambda)\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1 \left(\frac{2a^2}{a^2+c^2}\omega_3\lambda + \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\eta_3\lambda - \eta_3 \right) = 0 \\ \text{III)} \quad \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} = 0 \\ \text{IV)} \quad (A+\lambda P)\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2[(C-A)\omega_3 + Q\eta_3 - P\omega_3\lambda] = 0 \\ \text{V)} \quad (A+\lambda P)\frac{d\omega_2}{dt} - \omega_1[(C-A)\omega_3 + Q\eta_3 - P\omega_3\lambda] = 0 \end{array} \right.$$

da cui si ottiene $\eta_3 = \text{cost.}$ ed ω_1 e ω_2 della forma:

$$\omega_1 = \Gamma \cos(\gamma t + \varphi)$$

$$\omega_2 = \Gamma \sin(\gamma t + \varphi)$$

con Γ e φ costanti arbitrarie e γ dato da:

$$(4) \quad \gamma = \frac{(C-A)\omega_3 + Q\eta_3 - P\omega_3\lambda}{A + \lambda P} = \frac{\eta_3 - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \eta_3 \lambda - \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \omega_3 \lambda}{1 + \lambda}.$$

3. L'ultima eguaglianza della (4) che, assegnate le caratteristiche materiali del corpo, rappresenta una relazione tra ω_3 , η_3 e λ quando il moto della parte rigida è di precessione, può anche scriversi nella forma:

$$\mu = - \frac{\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} P \lambda^2 + \left(C - P + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} A \right) \lambda + (C - A)}{\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} P \lambda^2 + \left(Q - P + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} A \right) \lambda + (Q - A)}$$

dove si è posto $\mu = \frac{\eta_3}{\omega_3}$.

Introdotta l'eccentricità materiale del nucleo

$$\varepsilon = \frac{C_2 - A_2}{C_2} = \frac{a^2 - c^2}{2a^2}$$

ed osservato che $P = \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} Q$, la relazione precedente si può scrivere anche:

$$\mu = - \frac{\frac{\varepsilon(1-2\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} Q \lambda^2 + \left(C - \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} Q + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} A \right) \lambda + (C - A)}{\frac{\varepsilon(1-2\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} Q \lambda^2 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} (Q + A) \lambda + (Q - A)}$$

la quale mette in evidenza come, oltre che da λ , μ dipenda anche da ε .

Ne segue che il periodo della precessione, dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{2\pi}{\omega_3} \frac{A(1-\varepsilon) + (1-2\varepsilon)Q\lambda}{(C-A+Q\mu)(1-\varepsilon) - (1-2\varepsilon)Q\lambda} = \frac{2\pi}{\omega_3} \frac{(1+\lambda)(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)\mu - \varepsilon\mu\lambda - \lambda}$$

è funzione di λ ed ϵ , sia esplicitamente che attraverso $\mu(\lambda, \epsilon)$. È opportuno osservare che, se si pone $\epsilon=0$, il periodo T è indipendente da λ ed il suo valore T_0 , dato da:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_3} \frac{A-Q}{C-A} = \frac{2\pi}{\omega_3} \frac{A_1}{C_1-A_1}$$

è quello del periodo delle precessioni libere di un corpo rigido a struttura giroscopica di momenti principali d'inerzia A_1 e C_1 .

La stessa espressione T_0 del periodo si ottiene quando, pur avendo l'eccentricità un valore diverso da zero, si ponga $\lambda=0$ e quindi $\mu = \frac{C-A}{A-Q}$, ossia quando il nucleo ruota come rigido intorno all'asse di simmetria con velocità angolare relativa $\overline{\eta} = \frac{C-A}{A-Q} \overline{\omega_3 k}$: affinché l'involucro sia moto di precessione con il nucleo in rotazione rigida intorno all'asse di figura è necessario che la velocità angolare di questo ultimo abbia il valore indicato.

4. Studiamo ora alcune proprietà del periodo T assumendo come valori numerici delle costanti A , C , Q ed ω_3 quelli relativi alla Terra dati da G. J. F. MAC DONALD³⁾ e riportati da W. V. R. MALKUS⁴⁾:

$$A = 80,42 \cdot 10^{43} \text{ g cm}^2$$

$$C = 80,68 \cdot 10^{43} \text{ g cm}^2$$

$$Q = C_2 = 8,96 \cdot 10^{43} \text{ g cm}^2$$

$$\omega_3 = 7,2921 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec.}$$

Soffermiamoci innanzi tutto ad esaminare il comportamento della funzione $\mu = \mu(\lambda, \epsilon)$. Poichè non vogliamo discostarci dal problema geofisico che ha originato il nostro studio, ci sembra naturale portare l'attenzione soltanto sui seguenti intervalli di valori di ϵ e di λ che sono più aderenti al problema

³⁾ MAC DONALD G. J. F.: *The structures and strength of the inner planets* (Publ. Inst. Geophys. Planetary Phys., University of California, Los Angeles 1962).

⁴⁾ MALKUS W. V. R.: *Processional Torques as the Cause of Geomagnetism* (Journal of Geophysical Research, Vol. 68, n. 10, 1963).

stesso:

$$0 \leq \epsilon \leq \epsilon_T^5) = 0,0033$$

$$-0,1 \leq \lambda \leq 0,1.$$

Ciò vuol dire che si intendono esaminare i casi in cui l'eccentricità del nucleo è inferiore o al più uguale (caso omotetico) a quella della crosta terrestre⁶⁾ e che il moto del nucleo relativo a questa si suppone lento: infatti in corrispondenza a tali intervalli di ϵ e λ i calcoli numerici effettuati forniscono per μ valori dello stesso ordine di grandezza di quelli di λ .

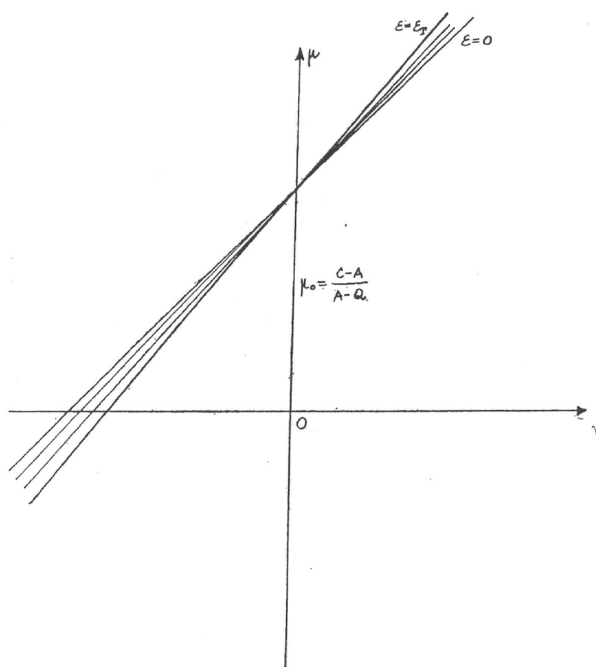


Fig. 1.

Nell'intervallo considerato μ è funzione crescente di λ per qualunque valore di ϵ ed al variare di ϵ essa è rappresentata nel piano (λ, μ) da una famiglia

⁵⁾ Con ϵ_T abbiamo indicato l'eccentricità della crosta terrestre.

⁶⁾ Diversi autori assumono per ϵ il valore 0,0026; vedasi ad esempio R. O. VICENTE: *La précession-nutation et la structure de la Terre* (Ciel et Terre, Vol. 86, n. 3, 1970).

di curve che passano tutte per il punto $\left(0, \frac{C-A}{A-Q} = 0,00363\right)$ e ciascuna delle quali, come intende illustrare il disegno della Fig. 1, interseca l'asse delle λ in un punto di ascissa negativa; a tale famiglia appartiene pure la retta, di coefficiente angolare $\frac{C-Q}{A-Q}$, che corrisponde al valore $\varepsilon=0$. Fra le precessioni possibili vi sono pertanto sia quelle con vorticità del nucleo giacente nel piano equatoriale ($\mu=0$), di modulo tanto più piccolo quanto maggiore è il valore di ε , sia quelle con vorticità diretta come l'asse di simmetria ($\lambda=0$) la cui intensità, indipendente da ε , vale $\frac{C-A}{A-Q} = \mu_0$.

5. Sostituendo nell'espressione di T_0 i valori numerici riportati all'inizio del paragrafo 4, si ottiene:

$$T_0 = 274,0963 \text{ giorni}$$

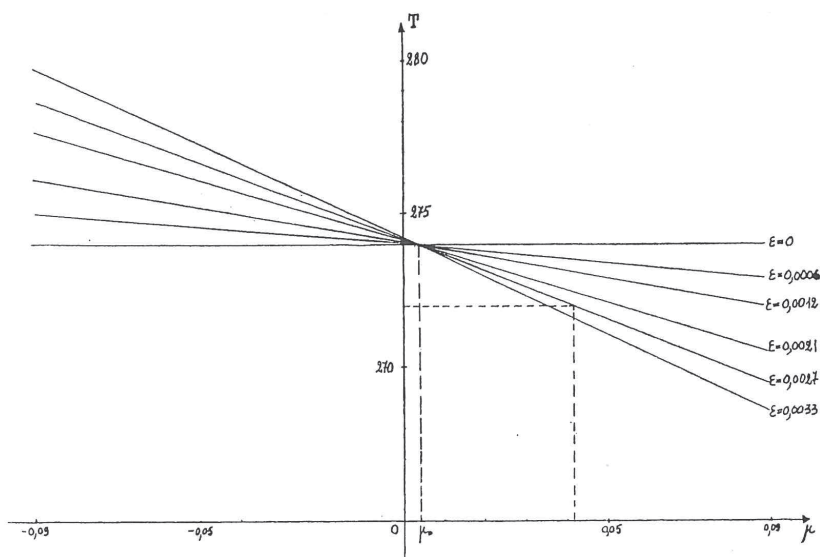


Fig. 2.

Come prevedibile per motivi di continuità e come del resto risulta dal calcolo numerico, quando per l'eccentricità del nucleo si assume un valore diverso da zero ma sufficientemente piccolo, il periodo della precessione pur discostandosi da questo valore di T_0 , non potrà differirne di molto. La forte differenza tra il valore di T_0 trovato e quello del periodo di precessione di

Chandler che, come è noto, è di circa 430 giorni, conferma quanto accennato nel paragrafo 1 sulla inadeguatezza del modello qui adottato.

Nel diagramma della Fig. 2 abbiamo rappresentato l'andamento del periodo T in funzione di μ per diversi valori di ϵ . Dall'esame di questo diagramma si deduce:

a) il periodo è funzione decrescente di μ e diminuisce tanto più rapidamente quanto maggiore è il valore dell'eccentricità: la precessione della crosta è tanto più rapida quanto maggiore è il valore della vorticità relativa η_3 intorno all'asse di simmetria e l'influenza di questa è tanto più sensibile quanto più grande è il valore di ϵ ;

b) mentre, come precedentemente osservato, in corrispondenza a $\mu = \frac{C-A}{A-Q} = 0,00363$ il periodo vale, per qualunque ϵ , 274,0963 giorni, per valori di $\mu < \mu_0$ il periodo aumenta al crescere di ϵ , per $\mu > \mu_0$ diminuisce. Ciò conformemente a quanto detto al punto a). Il valore del periodo di 272 giorni, riportato da R. O. VICENTE considerando la eccentricità del nucleo dell'ordine di 0,0026, corrisponde ad un valore di $\mu = 0,0429$ ossia ad una η_3 uguale a circa $\frac{1}{25}$ di ω_3 ;

c) la differenza dei valori dei periodi calcolati agli estremi dell'intervallo di variabilità di μ che è di circa 12 giorni per $\epsilon = 0,0033$ (caso omotetico) diminuisce per valori minori di ϵ fino ad annullarsi per $\epsilon = 0$. Per $\epsilon = 0,0026$ tale differenza è di circa 10 giorni.

RENDICONTI
DEL
SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE
DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

A. MELIS

**Sulla precessione Euleriana della Terra
secondo il modello di Kelvin**

Estratto dal volume:
Atti del Convegno Internazionale sulla
« Rotazione della Terra e Osservazioni di Satelliti Artificiali »
Cagliari, 16-18 aprile 1973

B O L O G N A
Graficoop - Società Tipografica Editoriale
1975

SULLA PRECESSIONE EULERIANA DELLA TERRA SECONDO IL MODELLO DI KELVIN

ANTONIO MELIS

(Istituto di Matematica, Università di Cagliari)

Per studiare il moto della Terra, in particolare la sua precessione euleriana, si è indotti ad analizzare i movimenti liberi di alcuni modelli di corpi non omogenei la cui distribuzione materiale è suggerita dalle conoscenze della geofisica. Il modello di Kelvin è costituito da un involucro rigido compreso fra due ellissoidi coassiali con simmetria di rotazione rispetto ad un asse, la cui cavità è completamente riempita di liquido non viscoso.

In questa ricerca si è adottato un tale modello con lo scopo ben preciso di indagare sulla influenza che hanno, sul periodo della precessione euleriana dell'involucro, l'eccentricità della cavità e la vorticità del liquido in essa contenuto.

Utilizzando i classici teoremi del momento della quantità di moto e di Helmholtz si possono scrivere le equazioni che reggono il moto per inerzia, rispetto al baricentro, del sistema materiale in esame. Esse sono, rispetto ad un sistema di riferimento con origine nel baricentro ed assi coincidenti con gli assi principali d'inerzia del corpo:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{d\omega_1}{dt} + P \frac{d\eta_1}{dt} + (C - A) \omega_2 \omega_3 + Q \omega_2 \eta_3 - P \omega_3 \eta_2 = 0 \\ A \frac{d\omega_2}{dt} + P \frac{d\eta_2}{dt} - (C - A) \omega_3 \omega_1 - Q \omega_1 \eta_3 + P \omega_3 \eta_1 = 0 \\ C_1 \frac{d\omega_3}{dt} = 0 \\ \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \omega_3 \eta_2 - \omega_2 \eta_3 - \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \eta_2 \eta_3 \end{array} \right.$$

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\omega_2}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{2a^2}{a^2 + c^2} \omega_3 \eta_1 + \omega_1 \eta_3 + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \eta_1 \eta_3 \\ \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} = \frac{2c^2}{a^2 + c^2} (\omega_2 \eta_1 - \omega_1 \eta_2) \end{cases}$$

con il seguente significato dei simboli:

$\bar{\omega} \equiv (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ = velocità angolare dell'involucro rigido;

$\bar{\eta} \equiv (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ = vorticità del nucleo liquido relativa all'involucro;

A = momento principale d'inerzia del sistema complessivo rispetto ad un qualunque asse equatoriale;

C = momento principale d'inerzia del sistema complessivo rispetto all'asse di simmetria z del corpo;

a, c = lunghezze dei semiassi della cavità;

C_1 = momento d'inerzia dell'involucro rispetto all'asse di simmetria;

$P = 4M_2 a^2 c^2 / 5(a^2 + c^2)$; $Q = 2M_2 a^2 / 5$ con M_2 massa del liquido.

Si dimostra innanzitutto il seguente teorema:

« Condizione necessaria e sufficiente affinché le (1) rappresentino un moto di precessione dell'involucro è:

$$\bar{\eta}_e = \lambda \bar{\omega}_e$$

dove $\bar{\eta}_e$ ed $\bar{\omega}_e$ sono rispettivamente i vettori componenti, sul piano equatoriale, della vorticità relativa $\bar{\eta}$ del nucleo e della velocità angolare $\bar{\omega}$ della parte rigida e dove λ è un fattore di proporzionalità costante ».

Infatti se il moto è di precessione, ossia se:

$$\omega_1 = \Gamma \cos(\gamma t + \varphi)$$

$$\omega_2 = \Gamma \sin(\gamma t + \varphi)$$

$$\omega_3 = \text{cost.}$$

la compatibilità delle (1) richiede che sia $\bar{\eta}_e = \lambda \bar{\omega}_e$ con λ costante.

Viceversa, supposto che si abbia $\bar{\eta}_e = \lambda \bar{\omega}_e$, le equazioni (1) impongono che sia:

$$\omega_1 = \Gamma \cos(\gamma t + \varphi)$$

$$\omega_2 = \Gamma \sin(\gamma t + \varphi)$$

$$\omega_3 = \text{cost.}$$

con I e φ costanti arbitrarie e γ dato da:

$$(2) \quad \gamma = \frac{(C - A)\omega_3 + Q\eta_3 - P\omega_3\lambda}{A + \lambda P} = \frac{\eta_3 - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\eta_3\lambda - \frac{2a^2}{a^2 + c^2}\omega_3\lambda}{1 + \lambda}.$$

L'ultima eguaglianza della (2), assegnate le caratteristiche materiali del corpo, rappresenta una relazione fra ω_3 , η_3 e λ quando il moto della parte rigida è di precessione e, in virtù di essa, il periodo della precessione stessa è dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{2\pi}{\omega_3} \frac{(1 + \lambda)(1 - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)\mu - \varepsilon\mu\lambda - \lambda}$$

dove $\varepsilon = \frac{C_2 - A_2}{C_2} \equiv \frac{a^2 - c^2}{2a^2}$ è l'eccentricità materiale del nucleo e

$$\mu = \frac{\eta_3}{\omega_3} = - \frac{\frac{\varepsilon(1 - 2\varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2} Q\lambda^2 + \left(C - \frac{1 - 2\varepsilon}{1 - \varepsilon} Q + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} A \right) \lambda + (C - A)}{\frac{\varepsilon(1 - 2\varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2} Q\lambda^2 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} (Q + A)\lambda + (Q - A)} :$$

viene così posta esplicitamente in evidenza la dipendenza di T da ε e da λ . Mediante queste formule con metodi numerici si sono studiate alcune proprietà del periodo T , portando l'attenzione sui seguenti intervalli di valori di ε e di λ che sono più significativi per il problema geofisico:

$$0 \leq \varepsilon \leq 0,0033$$

$$-0,1 \leq \lambda \leq 0,1$$

ed assumendo come valori numerici delle costanti A , C , Q ed ω_3 quelli riportati da W. V. R. MALKUS:

$$A = 80,42 \cdot 10^{43} \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

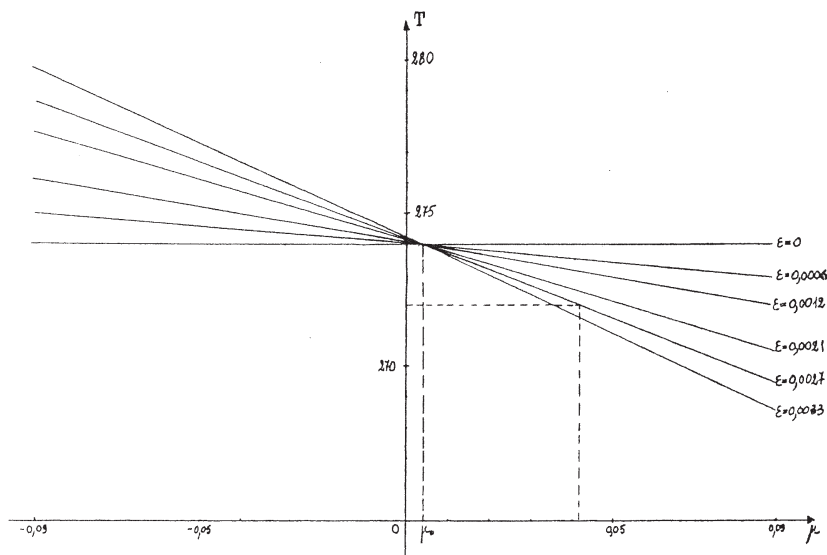
$$C = 80,68 \cdot 10^{43} \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

$$Q = C_2 = 8,96 \cdot 10^{43} \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

$$\omega_3 = 7,2921 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec.}$$

I risultati ottenuti sono messi chiaramente in luce dal diagramma riportato in figura, dove viene rappresentato l'andamento del periodo T in funzione di μ per diversi valori di ε . Dall'esame di questo diagramma si deduce:

a) il periodo è funzione decrescente di μ e diminuisce tanto più rapidamente quanto maggiore è il valore dell'eccentricità: la precessione della crosta è tanto più rapida quanto maggiore è il valore della vorticità relativa η_3 intorno all'asse di simmetria e l'influenza di questa è tanto più sensibile quanto più grande è il valore di ε ;



b) mentre in corrispondenza a $\mu_0 = (C - A)/(A - Q) = 0,00363$ il periodo vale, per qualunque ε , 274,0943 giorni, per valori di $\mu < \mu_0$ il periodo aumenta al crescere di ε , per $\mu > \mu_0$ diminuisce. Ciò conformemente a quanto detto al punto a). Il valore del periodo di 272 giorni, riportato da R. O. VINCENTE⁽²⁾ considerando la eccentricità del nucleo dell'ordine di 0.0026, corrisponde ad un valore di $\mu = 0,0429$ ossia ad una η_3 uguale a circa $1/25$ di ω_3 ;

c) la differenza dei valori dei periodi calcolati agli estremi dell'intervallo di variabilità di μ che è di circa 12 giorni per $\varepsilon = 0,0033$ (omotetia fra crosta e nucleo) diminuisce per valori minori di ε fino ad annullarsi per $\varepsilon = 0$. Per $\varepsilon = 0,0026$ tale differenza è di circa 10 giorni.

⁽¹⁾ MALKUS W. V. R.: *Precessional Torques as the Cause of Geomagnetism* (Journal of Geophysical Research, Vol. 68, n. 10, 1963).

⁽²⁾ R. O. VINCENTE: *La précession-nutation et la structure de la Terre* (Ciel et Terre, vol. 86, n. 3; 1970).

BIBLIOGRAFIA

Per maggiori dettagli su quanto qui riferito si vedano le due seguenti Note:

MELIS A., PIRAS B.: *Su alcuni movimenti di un ellissoide rotondo con cavità completamente riempita di liquido* (Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, Vol. XLII fasc. 3/4, 1972).

MELIS A., PIRAS B.: *Sul periodo della precessione euleriana della Terra secondo il modello di Kelvin* (Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, vol. XLIII fasc. 1/2, 1973).

Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari

1979

vol. XLIX - fascicolo 1-2
RSFSAK 49 1-304 (1979)

MELIS A.

Sul potenziale delle forze relativo ad una assegnata famiglia di orbite

litografia aldo trois - tel. 495729 - cagliari

SUL POTENZIALE DELLE FORZE
RELATIVO AD UNA ASSEGNATA FAMIGLIA DI ORBITE

Nota ^(o) di A.MELIS

Istituto di Matematica dell'Università di Cagliari

RIASSUNTO. Dopo alcune osservazioni sul significato geometrico che si può attribuire alla equazione di SZEBEHELY riguardante il potenziale relativo ad una assegnata famiglia di orbite, in questa Nota vengono trattati alcuni problemi di particolare significato meccanico e viene prospettata una generalizzazione per orbite che si sviluppano nello spazio.

SUMMARY. In this paper, first, we make some remarks about geometrical aspects of the SZEBEHELY equation concerning the potential of a fixed family of planar orbits. Further we investigate some problems, of great relevance in Mechanics, which are related to the same equation and we indicate a possible generalisation to three dimensional orbits.

1. Lo studio delle orbite dei satelliti artificiali della Terra (o in generale di un pianeta), che riveste notevole importanza in Meccanica Celeste, viene fra l'altro utilizzato per indagare sul campo gravitazionale da essa generato. Avendo preventivamente scelto la forma funzionale del potenziale da cui dipende tale campo, è possibile infatti precisare per via sperimentale il valore che si deve attribuire ai coefficienti che figurano nello sviluppo in serie tramite il quale il potenziale stesso viene rappresentato.

Un problema che si può ricollegare a questioni di tale tipo e che riveste altrettanta importanza per le applicazioni è, come viene osservato da SZEBEHELY (I), quello della determinazione del più generale campo di forze sotto l'azione delle quali un punto materiale percorre una traiettoria che sia assegnata tramite, ad esempio, osservazioni dirette.

^(o) Presentata alla Redazione per la pubblicazione dal Prof. G.AYMERICH il giorno 30 maggio 1979.

Nel IV capitolo del Trattato "Analytical Dynamics" di E.T. WHITTAKER (II) viene preso in esame un problema di questo tipo e viene riferito il seguente risultato di DAINELLI. Sia $\phi(x,y)=\alpha$ l'equazione di una curva del piano (x,y) ; al variare del parametro α questa equazione rappresenta una famiglia di curve del piano. Indicate con $X(x,y)$ ed $Y(x,y)$ le componenti della forza per ipotesi posizionale, il risultato di DAINELLI è:

$$X(x,y)=u(\phi_{xx}\phi_{yy}-\phi_{xy}^2)+\frac{1}{2}\phi_y(\phi_{xx}^2-\phi_{xy}^2)$$

$$Y(x,y)=u(\phi_{xy}\phi_{xx}-\phi_{xy}^2)+\frac{1}{2}\phi_x(\phi_{xy}^2-\phi_{xx}^2)$$

dove u è una funzione di x ed y dipendente dalla legge oraria con cui la traiettoria viene descritta, legata alla velocità v della particella dalla relazione:

$$v^2=-u(\phi_x^2+\phi_y^2)$$

V.SZEBEHELY, nella Nota già citata, ha fissato la propria attenzione sul caso particolarmente significativo in cui il campo delle forze è conservativo ed ha ricavato l'equazione alle derivate parziali:

$$(\phi_x^2+\phi_y^2)(\phi_{xx}U_x+\phi_{yy}U_y)+2(E+U)(\phi_{xx}^2\phi_{yy}-2\phi_{xy}\phi_{xx}\phi_{yy}+\phi_{xy}^2\phi_{xx})=0 \quad (1)$$

per il potenziale $U(x,y)$ relativo ad una data famiglia di orbite. In un lavoro pubblicato nel 1976 su "CELESTIAL MECHANICS" R.BROUCKE e H.IASS (III) hanno ripreso l'equazione scritta da SZEBEHELY, suggerendo per essa alcuni metodi di risoluzione e trattando alcuni casi significativi, in particolare quello delle orbite circolari.

E' interessante rimarcare che nell'equazione (1) si deve intendere assegnata la dipendenza dell'energia totale E , costante su ciascuna traiettoria, dal parametro α . Per chiarire questo punto si osservi infatti che, essendo del quarto ordine il sistema di equazioni differenziali del moto piano di una particella, il suo integrale generale contiene quattro costanti arbitrarie di integrazione. Scelta una di queste, addittiva al tempo t , per individuare l'istante iniziale sull'orbita, si può dire, come è ben noto, che vi è una triplice infinità di orbite effettivamente distinte, la quale può essere ordinata in insiemi, costituiti ciascuno da una doppia infinità di orbite, ai quali compete il medesimo valore E della costante dell'energia. Ciò induce a dire che ad ogni assegnato valore dell'energia totale E si

debbono associare ∞^2 possibili traiettorie e che al variare di E con α si passa dalle traiettorie di un insieme a quelle di un altro insieme.

Le traiettorie di un sistema dinamico si possono definire tramite il principio dell'azione stazionaria in quanto rendono stazionario, per il corrispondente valore E dell'energia, l'integrale d'azione:

$$A = \int (E+U)^{\frac{1}{2}} (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

Le estremali che così si ottengono sono pertanto le curve che costituiscono la famiglia a due prametri corrispondente al dato valore E dell'energia, di cui la traiettoria assegnata è un elemento. Orbene, con procedimento del tutto analogo a quello esposto da WHITTAKER^(o) per dare un criterio di esistenza di orbite chiuse, si trova che lungo le traiettorie del sistema corrispondenti ad un assegnato valore di E è nulla la quantità:

$$(E+U)/\rho + \frac{1}{2} \cos \gamma \partial U / \partial x + \frac{1}{2} \sin \gamma \partial U / \partial y \quad (2)$$

dove con ρ e γ si denotano rispettivamente il raggio di curvatura nel generico punto della traiettoria e l'angolo fra la normale alla curva nello stesso punto e l'asse x . Se per ρ , $\cos \gamma$ e $\sin \gamma$ si adottano le classiche espressioni:

$$\rho = (\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2} / (\phi_x^2 \phi_{yy} - 2\phi_{xy} \phi_{xy} + \phi_y^2 \phi_{xx}),$$

$$\cos \gamma = \phi_x / (\phi_x^2 + \phi_y^2)^{1/2}, \quad \sin \gamma = \phi_y / (\phi_x^2 + \phi_y^2)^{1/2}$$

sostituendo nella (2) si ottiene il primo membro dell'equazione (1). Si riconosce così che l'equazione (1) di SZEBEHELY è una diretta conseguenza del principio dell'azione stazionaria esprimente, come notorio, il fatto che le traiettorie di un punto in un campo di forze derivanti da un potenziale U , relative ad un prefisso valore dell'energia E , sono le geodetiche di una varietà bidimensionale il cui elemento lineare è dato da: $ds = (E+U)^{\frac{1}{2}} (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$. Pertanto il problema posto all'inizio si può tradurre nel seguente, di natura puramente geometrica:

Supposto che su una varietà metrica bidimensionale V_2 l'elemento lineare

(o) E.T.WHITTAKER - Opera citata (II): pagg. 386-389.

sia definito da:

$$ds^2 = F^2(x, y) (dx^2 + dy^2)$$

ed assegnata su V_2 una famiglia a due parametri di curve, determinare il fattore F^2 in modo tale che la suddetta famiglia ne costituisca l'insieme delle geodetiche.

2. Sia:

$$\phi(x, y; \lambda, \mu) = \alpha$$

l'equazione che rappresenta, al variare dei parametri λ e μ , la famiglia di curve corrispondenti al medesimo valore di E . Al variare di E si passa pertanto da una curva della famiglia individuata da un assegnato valore del parametro α ad una curva appartenente alla famiglia relativa ad un diverso valore di α , talchè si deve intendere $E = E(\alpha)$.

Si introduca ora, insieme con la famiglia di traiettorie, una nuova famiglia di curve:

$$\psi(x, y; \lambda, \mu) = \beta$$

ortogonali in ogni punto del piano a quelle della prima, e si assumano α e β quali nuove coordinate dei punti del piano. Con una tale scelta la energia cinetica T del punto materiale, supposto di massa unitaria, assume la forma normale:

$$T = \frac{1}{2} [A(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + B(\alpha, \beta) \dot{\beta}^2]$$

con

$$A = (\psi_x^2 + \psi_y^2) / J^2; \quad B = (\phi_x^2 + \phi_y^2) / J^2; \quad J = \phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x$$

e dove è: $\phi_x \psi_x + \phi_y \psi_y = 0$.

Indicato ancora con U il potenziale della forza espresso attraverso le due nuove coordinate e tenendo conto che sulla traiettoria $\alpha = \text{cost.}$ dovrà porsi: $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$ le equazioni del moto sono:

$$-\frac{1}{2} B_{\alpha} \dot{\beta}^2 = U_{\alpha}$$

$$B\ddot{\beta} + \frac{1}{2} B_{\beta} \dot{\beta}^2 = U_{\beta}$$

per le quali vale l'integrale primo:

$$\frac{1}{2} B \dot{\beta}^2 - U(\alpha, \beta) = E(\alpha).$$

Ricavando dalla prima: $\dot{\beta}^2 = -2U_\alpha/B_\alpha$, con l'ausilio della terza si ottiene:

$$B U_\alpha + B_\alpha U = -B_\alpha E$$

ossia: $(BU)_\alpha = -B_\alpha E$ che, per il richiesto potenziale U , porge l'espressione:

$$U(\alpha, \beta) = \frac{1}{B} [u(\beta) - \int B_\alpha E d\alpha] / B \quad (3)$$

con $u(\beta)$ funzione arbitraria del parametro β .

Allo scopo di illustrare con un significativo esempio il procedimento ora esposto, proseguendo nello stesso ordine di idee di R. BROUCKE e H. LASS, ci si pone il problema di determinare la classe delle funzioni potenziale relative ai campi di forze per cui le traiettorie siano tutte le ellissi del piano fra loro confocali. E' allora conveniente, per assegnare un punto nel piano x, y , adottare le coordinate ellittiche α e β definite dalle equazioni:

$$x = \lambda \cosh \alpha \cos \beta; \quad y = \mu \sinh \alpha \sin \beta;$$

ponendo in queste $\alpha = \text{costante}$ si ottengono ovviamente le ellissi, mentre le $\beta = \text{costante}$ rappresentano le iperboli con esse confocali. La richiesta ortogonalità di questo sistema di coordinate curvilinee esige intanto $\lambda = \mu$ e, detto c il valore ad essi comune, la espressione della energia cinetica attraverso le nuove coordinate è:

$$T = \frac{1}{2} c^2 (\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)$$

dove $A = B = c^2 (\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta)$. Essendo: $A_\alpha = 2c^2 \sinh \alpha \cosh \alpha$, la formula risolutiva porge:

$$U(\alpha, \beta) = [u(\beta) - 2c^2 \int E \sinh \alpha \cosh \alpha d\alpha] / c^2 (\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta).$$

Se, ad esempio, E dipende da α in ragione inversa di $\cosh \alpha$, in modo che risulta:

$$U(\alpha, \beta) = [u(\beta) - 2kc^2 \cosh \alpha] / c^2 (\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta),$$

la formula ottenuta può esprimere, con opportuna scelta della funzione arbitraria $u(\beta)$, il potenziale gravitazionale dovuto ad un solo centro di attrazione posto

in uno dei due fuochi, ovvero quello dovuto alla concomitante azione di due centri di attrazione (caso di BONNET).

Infatti, ponendo $u(\beta) = \pm 2kc^2 \cos \beta$, si ricavano le due espressioni analoghe:

$$U(\alpha, \beta) = -2k(\cosh \alpha + \cos \beta)^{-1}$$

oppure:

$$U(\alpha, \beta) = -2k(\cosh \alpha - \cos \beta)^{-1}$$

esprimenti il potenziale d'attrazione gravitazionale dovuto ad una massa M posta nell'uno o nell'altro fuoco e dove deve porsi: $k = -GM/2c$. Scegliendo invece per $u(\beta)$ la espressione $cG(M-M') \cos \beta$ e ponendo $k = -G(M+M')/2c$ si ricava:

$$U(\alpha, \beta) = GM/c(\cosh \alpha + \cos \beta) + GM'/c(\cosh \alpha - \cos \beta)$$

che è il potenziale gravitazionale provocato da due masse diverse M ed M' poste nei due fuochi delle ellissi.

Se invece E è data, attraverso α , dalla espressione:

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 c^2 (\cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha)$$

con ω costante, è agevole mostrare che il potenziale è dato da:

$$U(\alpha, \beta) = [\mu(\beta) - \omega^2 c^4 (\cosh^4 \alpha + \sinh^4 \alpha)/4] / c^2 (\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta)$$

che si riduce al ben noto potenziale di una forza di tipo elastico con centro di attrazione nell'origine se per $u(\beta)$ si sceglie l'espressione:

$$u(\beta) = \omega^2 c^4 (1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\beta) / 4$$

3. Per concludere si può mostrare come talvolta si può adottare un procedimento analogo a quello fin qui esposto quando la traiettoria del punto, anzichè essere una curva piana, è una curva gobba. Conviene introdurre un sistema di coordinate curvilinee nello spazio in modo che la traiettoria del punto sia una linea coordinata: ad esempio, indicate con:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

le equazioni che rappresentano la trasformazione, la traiettoria di P sia rappresentata da $q_1 = \text{cost.}$, $q_2 = \text{cost.}$ L'energia cinetica T del punto, espressa nelle

nuove variabili, assume la forma:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

per cui, osservando che lungo la traiettoria deve essere: $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$, si ricavano le equazioni del moto:

$$a_{13} \ddot{q}_3 + (\partial a_{13} / \partial q_3 - \frac{1}{2} \partial a_{33} / \partial q_1) \dot{q}_3^2 = \partial U / \partial q_1$$

$$a_{23} \ddot{q}_3 + (\partial a_{23} / \partial q_3 - \frac{1}{2} \partial a_{33} / \partial q_2) \dot{q}_3^2 = \partial U / \partial q_2$$

$$a_{33} \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} \dot{q}_3^2 \partial a_{33} / \partial q_3 = \partial U / \partial q_3$$

con l'integrale primo:

$$\frac{1}{2} a_{33} \dot{q}_3^2 - U = E.$$

Se $a_{13} \neq 0$ ed $a_{23} \neq 0$ la richiesta equazione per il potenziale U è allora:

$$a_{23} \partial U / \partial q_1 - a_{13} \partial U / \partial q_2 = 2A(E(q_1, q_2) + U) / a_{33}.$$

Se invece è $a_{13} = a_{23} = 0$ le equazioni del moto si riducono alle seguenti relazioni:

$$\partial U / \partial q_1 = -\frac{1}{2} \dot{q}_3 \partial a_{33} / \partial q_1; \quad \partial U / \partial q_2 = -\frac{1}{2} \dot{q}_3 \partial a_{33} / \partial q_2;$$

$$E + U = \frac{1}{2} a_{33} \dot{q}_3^2.$$

Eliminando $\dot{q}_3^2$ dalla prima e dalla seconda tramite la terza relazione si ricava:

$$a_{33} \partial U / \partial q_1 + U \partial a_{33} / \partial q_1 = -\partial a_{33} / \partial q_1 E$$

$$a_{33} \partial U / \partial q_2 + U \partial a_{33} / \partial q_2 = -\partial a_{33} / \partial q_2 E$$

ossia:

$$\partial (a_{33} U) / \partial q_1 = -\partial a_{33} / \partial q_1 E$$

$$\partial (a_{33} U) / \partial q_2 = -\partial a_{33} / \partial q_2 E$$

la cui compatibilità esige:

$$\partial a_{33} / \partial q_1 \cdot \partial E / \partial q_2 = \partial a_{33} / \partial q_2 \cdot \partial E / \partial q_1.$$

Ponendo $V = a_{33} U$ ed indicando semplicemente con a la funzione a_{33} , le due equazioni si scrivono:

$$\partial V / \partial q_1 = -\partial a / \partial q_1 E; \quad \partial V / \partial q_2 = -\partial a / \partial q_2 E$$

dalle quali si ricava:

$$V(q_1, q_2, q_3) = - \int_0^{q_1} (\partial a / \partial q_1 E)_{q_2=0} dq_1 - \int_0^{q_2} (\partial a / \partial q_2 E) dq_2 + v(q_3)$$

con $v(q_3)$ funzione arbitraria.

Tornando ai simboli primitivi si ricava così:

$$U(q_1, q_2, q_3) = - \left\{ \int_0^{q_1} (\partial a_{33} / \partial q_1 E)_{q_2=0} dq_1 + \int_0^{q_2} (\partial a_{33} / \partial q_2 E) dq_2 - v(q_3) \right\} / a_{33}$$

che generalizza la formula risolutiva (3) valida nel caso piano.

BIBLIOGRAFIA

- (I) V.SZEBEHELY: On the determination of the potential by satellite observations.
(Atti del Convegno Internazionale sulla "Rotazione della Terra ed osservazioni di satelliti artificiali", Cagliari, 1973-Rend.
Sem. Fac. Scien. Univ. Cagliari, Vol.XLIV, 1974, supplemento).
- (II) E.T.WHITTAKER: Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. (Cambridge-University Press, 1937)
- (III) R.BROUCKE-H.IASS: On SZEBEHELY's Equation for the Potential of a prescribed Family of Orbits. (Celestial Mechanics, Vol.16 n°.2, 1977).

Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari

1980

Supplemento al vol. L 1980
RSFSAK 50 1-322 (1980)

Melis A., Piras B. Rotazioni permanenti di un ellissoide con cavità completamente riempita di liquido autogravitante.

Litografia SIGLA ESSE Cagliari

ROTAZIONI PERMANENTI DI UN ELLISSOIDE CON CAVITA'
COMPLETAMENTE RIEMPITA DI LIQUIDO AUTOGRAVITANTE.

Nota (°) di A. Melis e B. Piras.
Istituto matematico dell'Università di Cagliari.

RIASSUNTO. Si mostra l'esistenza di rotazioni per inerzia di un involucro rigido ellissoidico completamente riempito di liquido, si esamina l'influenza del moto del liquido su quello dell'involucro e si confrontano i risultati ottenuti con quelli relativi alla teoria di RIEMANN.

SUMMARY. The existence of inertial rotations of an ellipsoidal rigid body with completely fluid filled cavity is established. Further the effects of the motion of the fluid on the containing shell are investigated. The results are compared with the ones given by the RIEMANN theory.

-1-

Nel suo recente trattato: "Ellipsoidal Figures of Equilibrium", S. CHANDRASEKHAR dedica uno spazio assai rilevante alla esposizione del classico problema di DIRICHLET sull'esistenza di movimenti di una massa fluida non viscosa, incompressibile ed autogravitante in cui la superficie libera di forma ellissoidale conserva la propria configurazione rispetto ad un riferimento inerziale. Tratta poi, utilizzando il metodo del viriale, la teoria sviluppata da RIEMANN il quale, prendendo le mosse dal problema posto da DIRICHLET, studiò il caso più generale e fisicamente più significativo in cui, fermando la possibilità di moti interni, la superficie ellissoidica del fluido si mantiene solidale non con il riferimento inerziale ma con un riferimento ruotante uniformemente rispetto a questo. Nella

(°) Presentata alla Redazione per la pubblicazione dal Prof. G. AYME-
RICH il giorno 20 dicembre 1980.

ipotesi che lo stato cinetico del fluido rispetto al riferimento ruotante sia del tipo "vorticoso omogeneo" ^(°) con vorticità $\bar{\eta}$, RIE MANN mostrò che vale il seguente importante teorema:

"Affinchè la superficie libera di una massa fluida incompressibile soggetta a forze interne di mutua attrazione gravitazionale sia un ellissoide a tre assi solidale con una terna mobile uniformemente ruotante con velocità angolare $\bar{\omega}$, occorre e basta che si verifichi l'uno o l'altro dei seguenti casi:

- (A) $\bar{\eta}$ ed $\bar{\omega}$ non paralleli ma appartenenti ad uno dei piani principali dell'ellissoide;
 (B) $\bar{\eta}$ ed $\bar{\omega}$ paralleli fra loro e quindi diretti secondo un asse principale."

In questo nostro lavoro prenderemo in considerazione un sistema materiale che in un certo senso generalizza quello del problema di DIRICHLET in quanto costituito da un involucro rigido compreso fra due superfici ellissoidiche omotetiche la cui cavità sia completamente riempita di liquido non viscoso. Supporremo anche noi che lo stato cinetico del fluido relativo all'involucro sia vorticoso omogeneo con vorticità $\bar{\eta}$ costante e che le forze presenti nel sistema

(°) Con tale denominazione [2] si intende uno stato cinetico esprimibile nella forma:

$$\bar{v}(P) = \text{grad } \Phi + \bar{\eta} \times \bar{r}$$

dove $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ è una funzione armonica della posizione del punto P che, per cavità ellissoidica di semiassi a_1, a_2 ed a_3 , ha la forma:

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{a_j^2 - a_i^2}{a_j^2 + a_i^2} \eta_{\kappa} x_i x_j \varepsilon_{ijk} \quad (i, j, \kappa = 1, 2, 3)$$

$\bar{\eta}$, funzione soltanto di t, è il vettore vorticità relativa all'involucro, $\bar{r}$ il vettore di posizione di P rispetto al baricentro, x_1, x_2 ed x_3 le coordinate di P rispetto al riferimento coincidente con gli assi di simmetria dell'ellissoide ed ε_{ijk} il tensore di RICCI: gli indici ripetuti che compaiono nella espressione di Φ sottintendono la operazione di somma.

siano rispetto ad un riferimento inerziale quelle di mutua attrazione gravitazionale, e dimostreremo la possibilità di rotazioni permanenti dell'involucro. Un sistema materiale così fatto era stato preso in esame in un nostro precedente lavoro [3] nel quale avevamo dimostrato che, qualora il sistema presenti simmetria di rotazione rispetto ad un asse, sono possibili moti di precessione per inerzia dell'involucro. In quella Nota non era stata formulata alcuna ipotesi sulla natura fisica del fluido e non si era pertanto precisato il tipo di forze interne in quanto non lo richiedevano le equazioni del moto da noi utilizzate. In questa invece, volendo determinare la influenza del moto del nucleo liquido su quello dell'involucro attraverso la pressione che il liquido stesso esercita sulla parete interna della cavità, onde poter fare qualche utile confronto fra i nostri risultati e quelli relativi alla teoria di RIEMANN, supporremo che le forze interne presenti nel sistema siano di mutua attrazione gravitazionale.

-2-

Le equazioni che reggono il moto per inerzia di un sistema materiale costituito da un involucro rigido di forma ellissoidica con cavità completamente riempita di liquido non viscoso in moto vorticoso omogeneo, nel riferimento solidale con l'involucro costituito dagli assi principali d'inerzia dell'intero sistema, sono [3]:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_i}{dt} + \frac{d\eta_i}{dt} + 2a_i^2 \varepsilon_{ijk} \frac{\omega_j + \eta_j}{a_i^2 + a_j^2} \eta_k = 0 \\ I_i \frac{d\omega_i}{dt} + J_i \frac{d\eta_i}{dt} + \varepsilon_{ijk} (I_k \omega_k + J_k \eta_k) \omega_j = 0 \end{array} \right.$$

(i, j, k = 1, 2, 3)

dove ω_i ed η_i sono rispettivamente le componenti della velocità angolare dell'involucro e della vorticità relativa del liquido, M)

la massa del liquido, I_i i tre momenti principali d'inerzia dello intero sistema e dove

$$J_1 = \frac{4}{5} M \frac{a_2^2 a_3^2}{a_1^2 + a_3^2}, \quad J_2 = \frac{4}{5} M \frac{a_1^2 a_3^2}{a_1^2 + a_3^2}, \quad J_3 = \frac{4}{5} M \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}.$$

Esaminiamo, come già detto nel paragrafo 1, la possibilità di rotazioni permanenti dell'involucro attorno ad un asse baricentrico. Ci limitiamo a considerare i due casi in cui l'asse di rotazione giace su un piano di simmetria del sistema (caso A) o in particolare (caso B) coincide con un asse principale d'inerzia in quanto è facile mostrare, se si esclude una qualunque simmetria materiale, che rotazioni permanenti di tipo diverso non sono possibili. Infatti, supponendo le ω_i tutte diverse da zero e ponendo:

$$(2) \quad \eta_i = \lambda_i (a_j^2 + a_k^2) \omega_i \quad (i \neq j \neq k)$$

con λ_i costanti, dal sistema (1) segue:

$$(3) \quad \begin{cases} \varepsilon_{ijk} \lambda_j (1 + a_j^2 \lambda_k) = 0 \\ \varepsilon_{ijk} a_k \lambda_j = H_i \end{cases} \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

dove per brevità abbiamo posto $H_i = 5 \varepsilon_{ijk} I_k / 4 M a_i^2$

Le (3) costituiscono un sistema di sei equazioni nelle tre incognite λ_i la cui compatibilità richiede, contrariamente alle nostre ipotesi, che il sistema materiale presenti simmetria sferica.

Caso A.

Supponiamo che la rotazione dell'involucro avvenga attorno ad un asse non principale ma appartenente ad un piano di simmetria dell'ellissoide, ad esempio il piano (X_1, X_3) . Posto allora nelle (1) $\omega_1 = 0$, si deduce immediatamente che pure $\eta_1 = 0$ e pertanto il sistema (3) si riduce alle due uniche equazioni significative:

$$\lambda_2 - \lambda_3 = (a_3^2 - a_2^2) \lambda_2 \lambda_3 \quad a_3^2 \lambda_2 - a_2^2 \lambda_3 = H_1$$

e quali, ponendo $\beta = -2a_3^2 \lambda_2$ e $\gamma = -2a_2^2 \lambda_3$, diventano:

$$(4) \quad \begin{cases} \beta^2 - 2(1-H_1)\beta + \frac{4a_3^2 H_1}{a_2^2 - a_3^2} = 0 \\ \gamma^2 - 2(1+H_1)\gamma + \frac{4a_2^2 H_1}{a_2^2 - a_3^2} = 0 \end{cases}$$

tenuto conto che:

$$(1-H_1)^2(a_2^2 - a_3^2) - 4a_3^2 H_1 = (1+H_1)^2(a_2^2 - a_3^2) - 4a_2^2 H_1$$

le equazioni (4) ammettono soluzioni reali purchè risultino non negative i due membri della precedente eguaglianza.

Assumendo ora l'ipotesi che le forze agenti, interne al sistema, provengano da mutua attrazione gravitazionale ed osservando [4] che l'involucro non esercita alcuna azione nei punti interni alla cavità da esso racchiusa, indichiamo con $\mathcal{U}(x_1, x_2, x_3)$ il potenziale per unità di volume delle forze di attrazione fra le sole particelle fluide. Esso in un punto interno o superficiale della cavità si può esprimere, tramite le lunghezze dei semiassi, nella seguente forma [1]:

$$\mathcal{U}(x_1, x_2, x_3) = A - \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2$$

$$A = R^3 \int_0^\infty \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}, \quad A_i = R^3 \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a_i^2 + \xi)\Delta(\xi)}$$

$$\text{e } R^3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \quad \Delta(\xi) = [(a_1^2 + \xi)(a_2^2 + \xi)(a_3^2 + \xi)]^{1/2}.$$

Rispetto al riferimento ruotante con l'involucro le equazioni indotte dal moto del fluido sono allora:

$$\mu \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 + 2\mu \varepsilon_{ijk} v_j \omega_k$$

ove μ è la densità materiale, p la pressione e le v_i (i, j, k = 1, 2, 3) rappresentano le componenti della velocità sugli assi principali d'inerzia.

Le equazioni (5), tenendo conto delle espressioni che competono

alle ψ_i per aver supposto lo stato cinetico del fluido vorticoso omogeneo, avendo presenti le posizioni (2) ed utilizzando l'espressione di $\mathcal{U}$ sopra riportata si ottiene, per la pressione p in seno al liquido:

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{\mu}{2} \left\{ \left[\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} \beta^2 - 2\beta + 1 \right) \omega_1^2 + \left(\frac{a_1^2}{a_2^2} \gamma^2 - 2\gamma + 1 \right) \omega_3^2 - 2A_1 \right] x_1^2 + \right. \\ \left. \left[\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} \gamma^2 - 2\frac{a_1^2}{a_2^2} \gamma + 1 \right) \omega_3^2 - 2A_2 \right] x_2^2 + \left[\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} \beta^2 - 2\frac{a_1^2}{a_2^2} \beta + 1 \right) \omega_1^2 - 2A_3 \right] x_3^2 \right\} + \\ - \mu \left(\frac{a_1^2}{a_2^2} \beta \gamma - 2\frac{a_1^2}{a_2^2} \gamma + 1 \right) \omega_1 \omega_3 x_1 x_3 + \cos t$$

con β e γ soluzioni delle equazioni (4).

Osserviamo che, nella teoria di RIEMANN, condizione necessaria per l'esistenza di configurazioni del fluido di forma ellissoidica con pressione nulla sulla superficie libera è che siano soddisfatte le seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} \beta^2 - \left(2 + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2a_1^2} \right) \beta + \frac{a_2^2}{a_1^2} = 0 \\ \gamma^2 - \left(2 + \frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_1^2} \right) \gamma + \frac{a_2^2}{a_1^2} = 0 \end{cases}$$

che stabiliscono un legame fra le grandezze geometriche a_1 , a_2 ed a_3 e le grandezze cinematiche $\bar{\omega}$ ed $\bar{\eta}$. Esse si identificano ovviamente con le equazioni (4) da noi scritte ove in queste si ponga $H_1 = (a_2^2 - a_3^2)/4a_1$ ossia qualora il sistema materiale sia costituito soltanto dalla parte liquida. Pertanto per valori di H_1 differenti da questo, come avviene nel nostro caso, il valore della pressione sulla superficie non può essere ovunque nullo e questa è appunto la causa che determina la rotazione uniforme dell'involucro rigido attorno ad un asse non principale.

Caso B.

Nell'ipotesi che la rotazione dell'involucro avvenga attorno ad un asse principale d'inerzia, ad esempio attorno all'asse x_3 , si ha che $\omega_1 = \omega_2 = 0$ e conseguentemente, affinché le (1) siano verificate, anche $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Detti allora ω ed η i valori arbitrari di ω_3 ed η_3 e posto $\eta = \lambda (a_1^2 + a_2^2) \omega$, l'espressione della pressione diventa:

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{\mu}{2} \left[(4a_1^2 a_2^2 \lambda^2 + 1) \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + 4\lambda \omega^2 (a_2^2 x_1^2 + a_1^2 x_2^2) \right] + \\ - \mu (A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2) + \text{cost}$$

Essa non è generalmente nulla sulla superficie ma è possibile mostrare che è nullo il momento risultante rispetto all'asse x_3 delle forze che essa esercita sulla parete interna dell'involucro, risultato necessario perchè sia possibile la ipotizzata rotazione uniforme della parte rigida attorno all'asse principale x_3 .

Se si suppone invece che siano soddisfatte le condizioni di RIEMANN:

$$(4a_1^2 a_2^2 \lambda^2 + 1) \omega^2 = \frac{2(A_1 a_1^2 - A_2 a_2^2)}{a_1^2 - a_2^2} \\ 2a_1^2 a_2^2 \lambda \omega^2 = \frac{A_2 - A_1}{a_1^2 - a_2^2} a_1^2 a_2^2 - a_3^2 A_3$$

nel qual caso viene meno la indipendenza di η da ω , la pressione, che in un generico punto del liquido assume ora la forma:

$$p(x_1, x_2, x_3) = -\mu A_3 a_3^2 \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \right) + \text{cost},$$

sulla superficie è costante ed in particolare è nulla se si assume il valore della pressione nel centro uguale a $\mu A_3 a_3^2$. In questo caso non vi è influenza reciproca fra il movimento dell'involucro e quello del liquido interno.

Fino ad ora abbiamo supposto che il sistema non possieda alcuna simmetria materiale. Se poi l'ellissoide fosse rotondo, ad esempio rispetto all'asse x_3 , sarebbe possibile con una conveniente scelta del riferimento solidale ricondurre lo studio del movimento, qualunque sia la direzione di ω , alla trattazione relativa al caso (A) del paragrafo 2. Se addirittura il sistema possedesse simmetria sferica ($a_1 = a_2 = a_3 = R$; $A_1 = A_2 = A_3 = 2/3$), utilizzando i risultati del caso (B) al quale ci si può ricondurre, si ricava per la pressione sulla superficie:

$$p_2 = \frac{\mu}{2} (2R^2\lambda + 1)^2 (R^2 - x_3^2) \omega^2 - \frac{2}{3} \mu R^2 + \text{cost}$$

la quale può annullarsi solo se $\lambda = -1/2R^2$ con il valore della costante addittiva uguale a $\frac{2}{3}\mu R^2$. A questo valore di λ corrisponde $\bar{\eta} = -\bar{\omega}$, il che sta a significare che la velocità relativa delle particelle liquide vale $\bar{v} = -\bar{\omega} \times \bar{r}$, ossia il liquido è in quiete rispetto al riferimento inerziale. Ciò è naturale in quanto è ben noto che l'unica configurazione di equilibrio di una massa fluida autogravitante è quella sferica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. CHANDRASEKHAR: Ellipsoidal Figures of Equilibrium. (Yale University Press, New Haven and London, 1969).
- [2] N. N. MOISEYEV-V. V. RUMYANTSEV: Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. (Springer Verlag, Berlin 1968)
- [3] A. MELIS-B. PIRAS: Su alcuni movimenti di un ellissoide rotondo con cavità completamente riempita di liquido. (Rend. Sem. Fac. Scienze Univ. Cagliari, XLII, 3/4, 1972)
- [4] C. AGOSTINELLI: Istituzioni di Fisica Matematica. (Zanichelli, Bologna 1962).

A. MELIS · B. PIRAS

ON A GENERALIZATION OF
SZEBEHELY'S PROBLEM

ESTRATTO DAI

*Rendiconti del Seminario
della Facoltà di Scienze
dell'Università di Cagliari*

Volume LII (1982) • fascicolo 1

UNIVERSITA' DI CAGLIARI
1982

On a Generalization of Szebehely's Problem

A. MELIS and B. PIRAS (*)

Summary. *In the present note, we generalize the Szebehely's problem considering forces generating a given family of orbits depending on the velocity components in addition to the coordinates of the point. We obtain a relation corresponding to the equation of Szebehely and we study some relevant examples.*

Sommario. *In questa nota si generalizza il problema trattato da Szebehely riguardante la caratterizzazione delle forze agenti su di un punto la cui traiettoria è una curva di una assegnata famiglia: si considera infatti il caso in cui le forze, oltre che dalla posizione, dipendano anche dalla velocità del punto mobile. Si scrive una relazione corrispondente alla equazione ottenuta da Szebehely e si studiano alcuni esempi particolarmente significativi dal punto di vista fisico.*

1. In the determination of the potential function $U(x, y)$ of forces acting on a free point whose trajectory is an element of a given family of planar orbits, Szebehely [1] obtained the linear, first order partial differential equation

$$(1) \quad f_x U_x + f_y U_y + 2W(U + E) = 0.$$

Here, $f(x, y) = \alpha$ denotes the given family of orbits on the (x, y) plane, as α varies. W is given by

$$W = \frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_x^2 + f_y^2}$$

and the value of the total energy E , constant along any trajectory, is a given function of α . Later other authors studied Szebehely's equation in order to give a geometrical interpretation of it, [2], or to suggest methods of solution and possible generalizations. Assuming an appropriate system of curvilinear orthogonal coordinates, a formula for the solution of problem was obtained in [3] and in [4] was shown that this formula gives a general solution of equation (1)

(*) Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze M.F.N. dell'Università di Cagliari.

Presentato il 21/7/82.

and can be constructed from a particular solution.

The Szebehely's problem was later generalized: in [5] with the hypothesis that the trajectories of the assigned family of curves belong to a surface in three-dimensional space; in [6] considering it in a rotating coordinate system. The latter case is equivalent to studying the motion of a point subject to a conservative force and to the Coriolis force, which is known to be linear in the components of the velocity with given constant coefficients.

In our Note we generalize this problem considering forces derived from a potential function that depends on the coordinates of the point and linearly on the velocity components with coefficients which are unknown functions of the coordinates. This is the case, for instance, of a point subject to a Lorentz force. With these assumption, we obtain a relation corresponding to (1) and we study some physically relevant situations.

2. If the forces acting on the point depend on its velocity besides its position, we assume in particular that they can be derived from a generalized potential function

$$U(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = U_1(x, y)\dot{x} + U_2(x, y)\dot{y} + U_3(x, y)$$

in which U_1 , U_2 and U_3 are functions to find. The differential equations of motion deduced from the lagrangian $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + U$ are

$$(2) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= U_{3/x} + (U_{2/x} - U_{1/y})\dot{y} \\ \ddot{y} &= U_{3/y} - (U_{2/x} - U_{1/y})\dot{x} \end{aligned}$$

where the subscripts indicate partial derivatives. They have first integral

$$(3) \quad \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U_3(x, y) = K = \text{Const.}$$

Let us assume that we have a one-parameter family of orbits $f(x, y) = \alpha$ where the trajectory of the point belongs. We have

$$(4) \quad f_x \dot{x} + f_y \dot{y} = 0$$

$$(5) \quad f_x \ddot{x} + f_y \ddot{y} + f_{xx} \dot{x}^2 + 2f_{xy} \dot{x}\dot{y} + f_{yy} \dot{y}^2 = 0.$$

From (3) and (4), we obtain the expressions

$$\dot{x} = \pm f_y \sqrt{\frac{2(U_3 + K)}{f_x^2 + f_y^2}} \quad \text{and} \quad \dot{y} = \mp f_x \sqrt{\frac{2(U_3 + K)}{f_x^2 + f_y^2}}.$$

Substituting these expressions with (2) in (5), yields the relation

$$(6) \quad f_x U_{3/x} + f_y U_{3/y} + 2W(U_3 + K) \pm (U_{2/x} - U_{1/y})[2(U_3 + K)(f_x^2 + f_y^2)]^{1/2} = 0.$$

This formula corresponds to (1) under our hypothesis about the forces. Formula (6) contains the quantity K that is constant on any one orbit and so must be given as an assigned function of the parameter α . The relation (6), once the family of curves $f(x, y) = \alpha$ is given, can be considered as a necessary condition for the three functions U_1 , U_2 and U_3 in order that the point describes the given trajectory. It shows how large is the class of functions satisfying the given problem: in fact it is possible, for exemple, to assign arbitrarily two of the u 's and, by (6), to deduce the differential equation for the third function.

If the functions U_1 and U_2 are such that $U_{2/x} - U_{1/y} = 0$, (6) becomes (1): in fact, the lagrangian functions of U and U_3 differ by a time-derivative of an arbitrary function. Hence, the corresponding equations of motion are the same, as it can also be deduced immediately from (2). On the other hand, if we assign the function $U_3(x, y)$, formula (6) becomes

$$(7) \quad U_{2/x} - U_{1/y} = \mp \frac{f_x U_{3/x} + f_y U_{3/y} + 2W(U_3 + K)}{[2(U_3 + K)(f_x^2 + f_y^2)]^{1/2}}$$

which represent the unique link between two functions U_1 and U_2 corresponding to the assigned orbit. The problem becomes: find the vectors of the (x, y) plane with components U_1 and U_2 of assigned curl.

The case when the difference $U_{2/x} - U_{1/y}$ is equal to a constant is also physically significant. This happens, for example, when we consider the point moving under conservative force, with regard to a coordinate system turning uniformly around an axis perpendicular to the (x, y) plane (see [6]). In fact, if we denote by ω the constant angular velocity of the coordinate system, it is known that the potential function of the relative forces is given by

$$U(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \omega (y\dot{x} - x\dot{y}) + U_3(x, y)$$

(where $U_3(x, y)$ contains the potential function of effective forces and also the potential $\omega^2(x^2 + y^2)/2$ of centrifugal force).

Therefore $U_{2/x} - U_{1/y} = -2\omega$ and equation (6) becomes

$$(8) \quad f_x U_{3/x} + f_y U_{3/y} + 2W(U_3 + K) \pm 2\omega[2(U_3 + K)(f_x^2 + f_y^2)]^{1/2} = 0.$$

Like formula (1), this equation is a first order partial differential equation in the single unknown function $U_3(x, y)$ but, unlike (1), it is not linear.

Equation (6) takes a form more convenient for applications if, instead of the x and y cartesian coordinates, we choose the curvilinear coordinates α and β defined by the assigned family of trajectories $f(x, y) = \alpha$ and by the family of curves $g(x, y) = \beta$ orthogonal to the given orbits, so that $f_x g_x + f_y g_y = 0$.

Then, the kinetic energy T and the potential function U become, respectively,

$$T = 1/2 [A(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + B(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2]$$

$$U = M(\alpha, \beta)\dot{\alpha} + N(\alpha, \beta)\dot{\beta} + U_3(\alpha, \beta)$$

in which

$$A(\alpha, \beta) = (g_x^2 + g_y^2)/J^2; \quad B(\alpha, \beta) = (f_x^2 + f_y^2)/J^2;$$

$$M(\alpha, \beta) = (U_1 g_y - U_2 g_x)/J; \quad N(\alpha, \beta) = (U_2 f_x - U_1 f_y)/J$$

and $J = f_x g_y - f_y g_x \neq 0$.

If we recall that $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$ on the trajectory, the equations of motion are

$$(9) \quad \begin{cases} (M_\beta - N_\alpha)\dot{\beta} - \frac{1}{2} B_\alpha \dot{\beta}^2 - U_{3/\alpha} = 0 \\ B\ddot{\beta} + \frac{1}{2} B_\beta \dot{\beta}^2 - U_{3/\beta} = 0 \end{cases}$$

which have first integral

$$(10) \quad \frac{1}{2} B \dot{\beta}^2 - U_3(\alpha, \beta) = K.$$

From the first equation of (9), taking in to account (10), we have

$$(11) \quad B U_{3/\alpha} + B_\alpha (U_3 + K) \pm (N_\alpha - M_\beta) [2B(U_3 + K)]^{1/2} = 0$$

which is the equation corresponding to (6) in the new coordinate system.

3. In order to give some applications of this theory, let us suppose that the family of trajectories is assigned with respect to a uniformly turning system. So, as previously said in n. 2, $U_{2/x} - U_{1/y} = -2\omega$. In particular, if we consider circular trajectories with center at the origin of the coordinate system, the equations of the two families of orthogonal curves are

$$x^2 + y^2 = \alpha, \quad \text{arctg } \frac{y}{x} = \beta.$$

This being the case,

$$M = 0, \quad N = -\omega\alpha, \quad B = \alpha$$

and equation (11) becomes

$$\alpha U_{3/\alpha} + U_3 + K \pm \omega \{2(U_3 + K)\}^{1/2} = 0.$$

Setting $V(\alpha, \beta) = \alpha(U_3 + K)$, this equation takes the following form

$$V_\alpha \pm \sqrt{2}\omega V^{1/2} = \alpha K_\alpha,$$

or

$$(12) \quad (V_\alpha - \alpha K_\alpha)^2 - 2\omega^2 V = 0.$$

In this equation neither the β coordinate nor the derivative with respect to β of the unknown function V appear explicitly. Hence it is an ordinary differential equation and its general integral will contain β as parameter.

If K does not depend on α (K constant), the general integral of the equation (12) is

$$V(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \{\omega\alpha \mp a(\beta)\}^2$$

where $a(\beta)$ is an arbitrary function of β . By definition of V , we can obtain for U_3 the following expression

$$U_3(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \omega^2 \alpha + a(\beta) \left\{ \frac{a(\beta)}{2\alpha} \mp \omega \right\}$$

up to an additive constant. If $a(\beta) = 0$, U_3 represent the potential function of the centrifugal force alone (point at absolute rest). If $a(\beta) \neq 0$, the second term of U_3 gives rise to a non-central force for which the circular orbit is travelled with non-uniform motion.

If $K = \alpha\lambda$ ($\lambda \pm \omega$), with arbitrary real constant λ , the function

$$U_3 = \frac{1}{2} (\omega^2 - \lambda^2) \alpha$$

is a solution of (12). It represent the potential function of the centrifugal force and of an elastic force with λ^2 as constant.

In case we choose for K the expression

$$K = -\frac{G}{2\sqrt{\alpha}} + \omega\sqrt{G^2\alpha}$$

we have a solution of the form

$$U_3 = \frac{1}{2} \omega^2 \alpha + \frac{G}{\sqrt{\alpha}}$$

which, besides the term coming from the centrifugal force, gives the Newtonian

potential with G as constant.

When the orbits are logarithmic spirals, the equations of the two families of orthogonal coordinate curves in polar coordinates are

$$\rho e^{\theta} = \alpha \quad \rho e^{-\theta} = \beta$$

It follows that

$$M = -\frac{\omega}{2} \beta, \quad N = \frac{\omega}{2} \alpha, \quad B = \frac{\alpha}{2\beta}$$

and the equation (11) becomes

$$\alpha U_{3/\alpha} + U_3 + K \pm 2\beta\omega \left\{ \frac{\alpha}{\beta} (U_3 + K) \right\}^{1/2} = 0.$$

One can verify that, when K is independent of α , a solution is given by

$$U_3 = \omega^2 \alpha \beta - K = \omega^2 \rho^2 - K.$$

This is the potential of the centrifugal force $\omega^2 \rho^2/2$ and of a repulsive force with intensity proportional to the distance from the origin, with the factor of proportionality is also equal to ω^2 .

References

- [1] SZEBEHELY V., 1974. *Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari*, XLIV, Suppl., 31.
- [2] MELIS A., 1979. *Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari*, XLIX, 157.
- [3] BROUCKE R., LASS H., 1977 *Celes. Mech.*, 16, 215.
- [4] MOLNAR S., 1981 *Celes. Mech.*, 25, 81.
- [5] MERTENS R., 1981 *ZAMM*, 61, T 252.
- [6] SZEBEHELY V., BROUCKE R. 1981 *Celes. Mech.*, 24, 23.

REPRINT



D. REIDEL PUBLISHING COMPANY

DORDRECHT-HOLLAND / BOSTON-U.S.A.

A. MELIS and B. PIRAS

Istituto matematico dell'Università di Cagliari, Italia

(Received 24 May; accepted 24 October, 1983)

ABSTRACT. We study the problem of the determination of the potential function of forces generating a given family of orbits in the n -dimensional configuration space of the representative point of a holonomic system. We obtain first-order partial differential equations to solve the problem and we discuss some particular examples.

SUNTO. Si studia il problema della determinazione del potenziale delle forze atte a far descrivere al punto rappresentativo di un sistema olonómo ad n gradi di libertà una traiettoria appartenente ad una assegnata famiglia di curve. Si scrivono le equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine che reggono il problema e si considerano alcuni esempi particolari.

1. INTRODUCTION

Several authors [1-7] have studied the problem of the determination of the potential function of forces acting on a particle whose trajectory is an element of a given family of curves. Szebehely obtained a linear, first-order partial differential equation for the potential function of forces for which a particle describes a trajectory belonging to a family of curves given in the plane [6]. Recently B. Erdi derived a system of two first-order linear partial differential equations for the determination of the potential in the three-dimensional case [2].

In the present note we generalize the problem considering a holonomic mechanical system having n degrees of freedom with constraints independent of time. In the n -dimensional configuration space S_n the path of motion of the system point Q is assigned as an element of a family of curves. Kinetic energy is expressed in a general form and the trajectory is assigned in S_n as the intersection of $(n-1)$ hypersurfaces. We extend the method followed by the authors mentioned and we obtain $(n-1)$ first-order linear partial differential equations for the potential function U .

If we consider the special case of a material point, these equations naturally become those obtained before. We also illustrate the procedure with the application to some particular examples.

2. DERIVATION OF THE FUNDAMENTAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Assume a holonomic system with n degrees of freedom and with constraints independent of time, described by the generalized coordinates $q_1, q_2, \dots, q_n$. If the forces are derivable from a potential U , the differential equations of motion are

$$a_{rk} \ddot{q}_k + \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_r} \right) \dot{q}_h \dot{q}_k = \frac{\partial U}{\partial q_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

where a_{rk} is in general dependent on the coordinates and the kinetic energy is $T = \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$. In (1) dots denotes derivatives with respect to time; repeated subscripts indicate summation from 1 to n .

The equations which represent the assigned family of paths in space S_n are:

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = c_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

where c_i are arbitrary constants. Assume that f_i satisfies all conditions to define implicitly $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ as functions of q_n and to have first and second derivatives. Denoting q_n by χ , we may write:

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(\chi) \\ \dot{q}_j &= \frac{dq_j}{d\chi} \dot{\chi}, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \\ \ddot{q}_j &= \frac{d^2 q_j}{d\chi^2} \dot{\chi}^2 + \frac{dq_j}{d\chi} \ddot{\chi}, \end{aligned}$$

where

$$\frac{dq_j}{d\chi} = - \frac{D_j}{D} = F_j(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, \chi), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 q_j}{d\chi^2} = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\partial F_j}{\partial q_s} \frac{dq_s}{d\chi} + \frac{\partial F_j}{\partial \chi} = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\partial F_j}{\partial q_s} F_s + \frac{\partial F_j}{\partial \chi}. \quad (3)$$

In these relations D is the Jacobian determinant:

$$D = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})}{\partial(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}$$

and D_j is given by

$$D_j = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})}{\partial(q_1, \dots, q_{j-1}, \chi, q_{j+1}, \dots, q_{n-1})}.$$

Then the equations of motion become

$$\alpha_r \ddot{\chi} + \beta_r \dot{\chi}^2 = \frac{\partial U}{\partial q_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

where $q_n = \chi$ and α_r and β_r are given by

$$\alpha_r = a_{rk} \frac{dq_k}{d\chi},$$

$$\beta_r = \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_r} \right) \frac{dq_h}{d\chi} \frac{dq_k}{d\chi} + a_{rk} \frac{d^2 q_k}{d\chi^2}.$$

Introducing

$$\tau = a_{hk} \frac{dq_h}{d\chi} \frac{dq_k}{d\chi}$$

where E is the total mechanical energy of the system. We obtain in this way

$$\dot{\chi} = \frac{2(U + E)}{\tau}.$$

We can write the energy integral in the form

$$\frac{1}{2} \tau \dot{\chi}^2 = U + E,$$

Let $r=n$ in Equation (4) and replace the expression of $\dot{\chi}^2$. We have, letting $\alpha_n = \alpha$ and $\beta_n = \beta$:

$$\dot{\chi} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial U}{\partial \chi} - \frac{2(U + E)}{\tau} \beta \right].$$

Substituting the expressions $\dot{\chi}^2$ and $\dot{\chi}$ in the remaining $(n-1)$ equations of the system (4) we obtain

$$\alpha_r \frac{\partial U}{\partial \chi} - \alpha \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{2(E + U)}{\tau} (\alpha \beta_r - \alpha_r \beta) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1). \quad (5)$$

These are the required $(n-1)$ equations for the potential function U . They may be interpreted from two different viewpoints:

(a) they are differential equations for the determination of paths which are consistent with the potential U of an assigned force field and correspond to the value E of total energy;

(b) they represent $(n-1)$ conditions that must be satisfied by the potential U so that point Q describes an assigned path of motion with a given value E .

We are interested in the latter aspect for the extension of Szebehely's problem to mechanical systems. If we have a unit mass particle equations (5) assume the form

$$\frac{\partial q_r}{\partial \chi} \frac{\partial U}{\partial \chi} - \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{2(E + U)}{2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial q_k}{\partial \chi} \right)^2 + 1} \frac{\partial^2 q_r}{\partial \chi^2} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1)$$

in agreement with the results obtained by authors mentioned above for the cases $n=2$ and $n=3$.

3. APPLICATIONS

In order to illustrate the procedure we consider some problems concerning particular material systems.

As a first example let us consider (Figure 1) a plate with mass M and

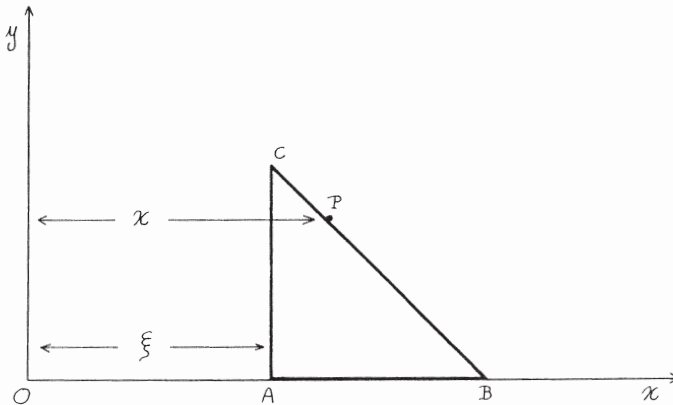


Fig. 1. The holonomic system with two degrees of freedom of the first example.

the form of an isosceles right triangle, moving in the $(0, x, y)$ plane so that side AB moves along the x -axis. A point P with mass m describes the hypotenuse BC. If ξ and x are respectively the abscissa of A and P , the kinetic energy of the system is

$$T = \frac{1}{2}[(m + M)\dot{\xi}^2 + 2m\dot{x}^2 - 2m\dot{\xi}\dot{x}].$$

Given the equations of the family of orbits $f(x, \xi) = c$ in order to define implicitly ξ as a function of x , system (5) becomes a single equation

$$\begin{aligned} & \left[(M + m) \frac{d\xi}{dx} - m \right] \frac{\partial U}{\partial x} + m \left(\frac{d\xi}{dx} - 2 \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \\ & + \frac{2m(2M + m)(E + U)}{(M + m) \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 - 2m \frac{d\xi}{dx} + 2m} \frac{d^2 \xi}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

The solution of (6) gives the potential U generating a prescribed family of curves of the (x, ξ) plane with the constant value E of total energy along any path of motion.

If we consider for example the family of straight lines

$$\xi - hx = c,$$

where h and c are arbitrary constants, Equation (6) becomes

$$[(m + M)h - m] \frac{\partial U}{\partial x} + m(h - 2) \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0.$$

The general solution of this equation is given by

$$U = G \left(\xi - \frac{m(h - 2)}{(m + M)h - m} x \right),$$

where G is an arbitrary function of its argument. In particular, if $h = -m/M$, U is a function of the combination $\xi - x$. To this type belong for example both the potential of weight when the plane $(0, x, y)$ is vertical and the potential of any elastic force acting upon P parallel to one of the coordinate axes.

As a second example consider a homogeneous rigid rod AB with unit mass and length 2ℓ moving in the (x, y) plane so that A moves without friction along the x -axis. Let us call x and θ respectively the abscissa of A and the angle of the rod with the y -axis. The kinetic energy is

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \frac{4}{3} \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} \right),$$

where, unlike in the preceding example, the coefficient of the rectangular term $\dot{x} \dot{\theta}$ depends on θ . Given the equation $f(x, \theta) = \text{const.}$ of the paths of the system point, (5) becomes

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dx}{d\theta} \ell \cos \theta + \frac{4}{3} \ell^2 \right) \frac{\partial U}{\partial x} - \left(\frac{dx}{d\theta} + \ell \cos \theta \right) \frac{\partial U}{\partial \theta} = \\ & = \frac{2(E + U)}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + 2\ell \frac{dx}{d\theta} \cos \theta + \frac{4}{3} \ell^2} \left[\left(\frac{4}{3} \ell^2 - \ell^2 \cos^2 \theta \right) \frac{d^2 x}{d\theta^2} - \right. \\ & \quad \left. - \ell^2 \frac{dx}{d\theta} \sin \theta \cos \theta - \frac{4}{3} \ell^3 \sin \theta \right], \end{aligned}$$

where $dx/d\theta$ and $d^2x/d\theta^2$ are calculated by Equations (2) and (3). For example we want the solution of this equation when the family of curves is

$$x + \ell \sin \theta = c.$$

Then we obtain U as an arbitrary function of only θ : this happens if we consider the relevant case of a heavy rod moving on the vertical plane.

As a last example we take a system of three degrees of freedom: a rigid rod with unit mass and length 2ℓ moving in a plane. If x and y are the coordinates of the middle point and θ is the angle between the rod and the x -axis, following the procedure indicated, we have

$$3 \frac{dx}{d\theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \ell^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2\ell^2(E+U)}{\tau} \frac{d^2x}{d\theta^2} = 0,$$

$$3 \frac{dy}{d\theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \ell^2 \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2\ell^2(E+U)}{\tau} \frac{d^2y}{d\theta^2} = 0,$$

where

$$\tau = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \frac{\ell^2}{3}.$$

We can verify for example that if the paths of the system point are

$$x - h\theta = c_1, \quad y - k\theta = c_2$$

with h and k arbitrary constants, the previous equations are satisfied by

$$U = G(3hx + 3ky + \ell^2\theta),$$

where G is an arbitrary function of the argument $3hx+3ky+\ell^2\theta$.

ACKNOWLEDGEMENT

The authors wish to express their gratitude to Professor Victor Szebehely for his suggestions on the paper.

REFERENCES

- [1] Broucke, R. and Lass, H.: 1977, Celest. Mech. 16, 225.
- [2] Érdi, B.: 1982, Celest. Mech. 28, 209.
- [3] Melis, A.: 1979, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari XLIX, 157.
- [4] Mertens, R.: 1981, ZAMM 61, T. 252.
- [5] Molnár, S.: 1981, Celest. Mech. 25, 81.
- [6] Szebehely, V.: 1974, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari XLIV, Suppl., 31.
- [7] Szebehely, V. and Broucke, R.: 1981, Celest. Mech. 24, 23.

A. MELIS - B. PIRAS

UNA OSSERVAZIONE SUL
«PROBLEMA INVERSO GENERALIZZATO»
DI SZEBEHELY

ESTRATTO DAI
*Rendiconti del Seminario
della Facoltà di Scienze
dell'Università di Cagliari*
Volume LIV (1984) • fascicolo 2

UNIVERSITA' DI CAGLIARI
1984

Una osservazione sul "Problema inverso generalizzato" di Szebehely*

A. MELIS, B. PIRAS (**)

Summary. *Through the use of JACOBI's formulation of the least action principle, differential equations for «SZEBEHELY's problem» extended to a holonomic system with n degrees of freedom are obtained.*

In un recente lavoro [1] abbiamo generalizzato il «problema di SZEBEHELY» considerando un sistema olonomo ad n gradi di libertà: assegnata una famiglia di traiettorie del punto Q rappresentativo del sistema nello spazio S_n delle configurazioni come intersezione di $(n - 1)$ ipersuperfici di equazioni

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1)$$

e supposte verificate tutte le condizioni che consentono di definire, tramite queste, $(n - 1)$ delle coordinate lagrangiane in funzione della rimanente $q_n = x$, abbiamo dimostrato che il potenziale U delle forze atte a far descrivere al punto Q una traiettoria dell'assegnata famiglia deve soddisfare alle seguenti equazioni:

$$(1) \quad \Lambda_r = \alpha_r \frac{\partial U}{\partial x} - \alpha \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{2(E + U)}{\tau} (\alpha_r \beta - \beta_r \alpha) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n - 1).$$

In esse, tenuto conto dell'espressione dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

i simboli che compaiono hanno il seguente significato:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

(**) Dipartimento di Matematica dell'Università di Cagliari.

Presentato il 10/7/1984.

$$\begin{aligned}
\tau &= \sum_{h,k=1}^n a_{hk} q'_h q'_k = \sum_{h=1}^n \alpha_h q'_h; \quad \left(q'_i = \frac{dq_i}{d\chi} \right) \\
\alpha_r &= \sum_{k=1}^n a_{rk} q'_k = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \quad (r = 1, 2, \dots, n-1) \\
\beta_r &= \sum_{h,k=1}^n \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_r} \right) q'_h q'_k + \sum_{k=1}^n a_{rk} q''_k = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\chi} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} - \frac{\partial \tau}{\partial q_r} \right) \\
\alpha &= \sum_{k=1}^n a_{nk} q'_k = \tau - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j q'_j \\
\beta &= \sum_{h,k=1}^n \left(\frac{\partial a_{nk}}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial \chi} \right) q'_h q'_k + \\
&+ \sum_{k=1}^n a_{nk} q''_k = \frac{d\alpha}{d\chi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \chi}
\end{aligned}$$

ed E denota il valore dell'energia totale, costante su ogni traiettoria.

Interpretando le (1) come equazioni differenziali per le traiettorie compatibili con un campo di forze conservative di dato potenziale U , ci è sembrato interessante mostrare che è possibile ottenere le stesse deducendole da un principio variazionale, ossia trattare il problema ravvisando in esso un aspetto particolare che lo inserisce nel più ampio problema inverso della Meccanica analitica. Una osservazione di questo tipo è stata fatta di recente nei riguardi della equazione di SZEBEHELY relativa ad un punto materiale [2]. Nel seguito esporremo succintamente il procedimento adottato, rimandando per i particolari della trattazione alla Nota scritta in forma più estesa presentata per la pubblicazione sulla rivista «Celestial Mechanics».

Introduciamo l'integrale d'azione

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2T \, dt$$

che, utilizzando il teorema della conservazione dell'energia nella forma

$$\tau \dot{\chi}^2 = 2(E + U)$$

può scriversi

$$A = \int_{\chi_1}^{\chi_2} \sqrt{2\tau(E + U)} d\chi$$

In esso non compare più la variabile temporale e χ_1 e χ_2 sono le determinazioni della variabile χ nelle configurazioni iniziale e finale. L'integrale A risulta così un funzionale definito nella classe di funzioni

$$q_j = q_j(\chi) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).$$

assegnate implicitamente dalle equazioni $f_i = c_i$. Il parametro χ svolge qui il ruolo di variabile indipendente e come tale viene mantenuto immutato nel processo di determinazione della variazione prima di A . Tale procedimento costituisce una applicazione della nota formulazione di JACOBI del principio di minima azione [3].

Le equazioni di EULERO che assicurano la stazionarietà del funzionale A si possono scrivere nella forma:

$$(2) \quad \begin{aligned} & \frac{E + U}{\tau} \left(\frac{d}{d\chi} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} - \frac{\partial \tau}{\partial q_r} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \frac{d}{d\chi} \frac{E + U}{\tau} - \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Introducendo le notazioni sopra ricordate le equazioni (2) assumono la forma

$$\Lambda_r + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j \Lambda_r - \alpha_r \Lambda_j}{\alpha} q'_j = 0$$

o quella equivalente

$$(3) \quad \frac{\alpha_r q'_r - \tau}{\alpha_r} \Lambda_r + \sum_{j=1}^{n-1} {}^{(r)} q'_j \Lambda_j = 0$$

dove il simbolo $\sum_{j=1}^{n-1} {}^{(r)}$ rappresenta la somma estesa a tutti i valori dell'indice j escluso il valore r .

Posto

$$q'_j - \delta_{rj} \frac{\tau}{\alpha_r} = \lambda_{rj} \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & r = j \\ \delta_{rj} = 0 & r \neq j \end{array} \right)$$

il sistema (3) diventa

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{rj} \Lambda_j = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, n-1)$$

che, essendo

$$\det \|\lambda_{rj}\| = \frac{\alpha}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} \tau^{n-2} \neq 0$$

è equivalente al sistema di equazioni

$$\Lambda_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-1)$$

ottenuto in [1] per via diretta.

Bibliografia

- [1] MELIS A., PIRAS B., An Extension of Szebehely's Problem to Holonomic Systems. *Celest. Mech.* **32**, 87 (1984).
- [2] PUEL F., Equation de Szebehely et principes variationels. *Celest. Mech.* **32**, 349 (1984).
- [3] GOLDSTEIN H., *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publ. Comp. Inc. Reading, Massachusetts (1950).

AN OBSERVATION ON THE INVERSE EXTENDED PROBLEM OF SZEBEHELY

A. MELIS and B. PIRAS

Dipartimento di Matematica dell' Università di Cagliari, Italia

(Received December 5, 1984; accepted March 7, 1985)

Abstract. Through the use of Jacobi's formulation of the least action principle, differential equations for "Szebehely's problem" extended to a holonomic system with n degrees of freedom are obtained.

Sunto. Si riottengono le equazioni differenziali relative al "problema di Szebehely" esteso ad un sistema olonomo ad n gradi di libertà utilizzando il principio di minima azione nella formulazione di Jacobi.

1. Introduction

Recently [1] we showed an extension of the inverse problem of Szebehely considering a holonomic system having n degrees of freedom.

As Szebehely pointed out when considering the case of a particle [2], the existence of several approaches more or less facilitates the treatment of the problem, particularly as regards the way in which the family of trajectories is given. In [1] the path of motion of the system point in S_n is considered the intersection of $(n-1)$ hypersurfaces

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}) = c_i \quad (i=1, 2, \dots, k, n-1)$$

and we assume that f_i satisfies all the conditions to define

$q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ as functions of $q_n = \chi$.

In this manner the potential function U must satisfy the following equations:

$$\alpha_r \frac{\partial U}{\partial \chi} - \alpha \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{2(E+U)}{\tau} (\alpha_r \beta - \beta_r \alpha) = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n-1) \quad (1)$$

The kinetic energy is expressed by:

$$T = \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k ;$$

the symbols used are defined as follows:

$$\tau = a_{hk} q'_h q'_k = \alpha_h q'_h ; \left(q'_i = \frac{dq_i}{d\chi} \right)$$

$$\alpha_r = a_{rk} q'_k = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \quad (r=1, 2, \dots, n-1)$$

$$\begin{aligned} \beta_r &= \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_r} \right) q'_h q'_k + a_{rk} q''_k = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\chi} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} - \frac{\partial \tau}{\partial q_r} \right) \quad (r=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$$\alpha = a_{nk} q'_k = \tau - \alpha_j q'_j$$

$$\beta = \left(\frac{\partial a_{nk}}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial \chi} \right) q'_h q'_k + a_{nk} q''_k = \frac{d\alpha}{d\chi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \chi}$$

and E is the total energy of the system, constant along each trajectory. Repeated subscripts h, k indicated summation from 1 to n ; j from 1 to $n-1$.

As noted in [1], equations (1) represent either the conditions for the potential U when the trajectories are assigned or the differential equations for the determination of paths consistent with the potential U of an assigned force field. In this respect it is interesting to show that the same equations can be obtained by a variational principle. An observation of this kind has recently been made on Szebehely's equation regarding the 'inverse problem' for a material point [3].

2. The Variational Principle

For this purpose we consider the action defined by the integral

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2T \, dt.$$

Using the energy integral in the form

$$\tau \dot{\chi}^2 = 2(E + U)$$

we have

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2\tau(E+U)} \, d\chi.$$

The time variable no longer appears and x_1 and x_2 are the values of the parameter χ at the end points.

Therefore integral A is a functional defined in the class of functions

$$q_j = q_j(\chi) \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

implicitly assigned from the equations $f_i = c_i$. Parameter χ is here the independent variable and as such is constant during the displacements which characterize the first variation of the integral A . With respect to χ , the extremum of action A leads to Euler's familiar differential equations. This procedure is an application of Jacobi's known formulation of the least action principle [4].

3. Conditions for the Stationarity of A

Euler's equations for the stationarity of the functional

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2\tau(E+U)} \, d\chi$$

are given by

$$\frac{E+U}{\tau} \left(\frac{d}{d\chi} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} - \frac{\partial \tau}{\partial q_r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \frac{d}{d\chi} \frac{E+U}{\tau} - \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0$$

$$(r=1, 2, \dots, n-1)$$

In order to compare these equations with (1) of the first section, after some transformations we can write them in alternate form:

$$\frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \frac{\partial U}{\partial \chi} - 2\tau \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \frac{\partial U}{\partial q_j} q'_j +$$

$$+ \frac{2(E+U)}{\tau} \left[\tau \left(\frac{d}{d\chi} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} - \frac{\partial \tau}{\partial q_r} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \frac{d\tau}{d\chi} \right] = 0$$

or

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \frac{\partial U}{\partial \chi} - (2\tau - \frac{\partial \tau}{\partial q'_j} q'_j) \frac{\partial U}{\partial q_r} + q'_j \left(\frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{\partial \tau}{\partial q'_j} \frac{\partial U}{\partial q_r} \right) + \\ & + \frac{2(E+U)}{\tau} \left[\tau \left(\frac{d}{d\chi} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} - \frac{\partial \tau}{\partial q_r} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \frac{d\tau}{d\chi} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Now considering the identities:

$$\begin{aligned} & \tau \left(\frac{d}{d\chi} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} - \frac{\partial \tau}{\partial q_r} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial q'_r} \frac{d\tau}{d\chi} = 2[\alpha_{\beta_r} - \alpha_r \beta + (\alpha_j \beta_r - \alpha_r \beta_j) q'_j] \\ & (r=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

equations (2) become

$$\begin{aligned} & \alpha_r \frac{\partial U}{\partial \chi} - \alpha \frac{\partial U}{\partial q_r} + q'_j (\alpha_r \frac{\partial U}{\partial q_j} - \alpha_j \frac{\partial U}{\partial q_r}) + \\ & + \frac{2(E+U)}{\tau} [\alpha_{\beta_r} - \alpha_r \beta + (\alpha_j \beta_r - \alpha_r \beta_j) q'_j] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Now if we denote the first member of equations (1) by Λ_r , and given that

$$\begin{aligned} & \{q'_j [\alpha_r \frac{\partial U}{\partial q_j} - \alpha_j \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{2(E+U)}{\tau} (\alpha_j \beta_r - \alpha_r \beta_j)]\} = \\ & = \frac{\alpha_j \Lambda_r - \alpha_r \Lambda_j}{\alpha} q'_j, \end{aligned}$$

equations (3) assume the form

$$\Lambda_r + \frac{\alpha_j \Lambda_r - \alpha_r \Lambda_j}{\alpha} q'_j = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n-1)$$

or the equivalent

$$\frac{\alpha_r q'_r - \tau}{\alpha_r} \Lambda_r + q'_j \Lambda_j = 0. \quad (j \neq r) \quad (r=1, 2, \dots, n-1) \quad (4)$$

If we use the following notations:

$$q'_j - \delta_{rj} \frac{\tau}{\alpha_r} = \lambda_{rj} \quad (\delta_{rj} = \begin{cases} 1 & r=j \\ 0 & r \neq j \end{cases})$$

system (4) can also be written as

$$\lambda_{rj} \Lambda_j = 0, \quad (r=1, 2, \dots, n-1) \quad (5)$$

We find, after some straight-forward calculations, that

$$\det \|\lambda_{rj}\| = \frac{\alpha}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} \tau^{n-2} \neq 0$$

and we can conclude that the system (5) is equivalent to the system of partial differential equations:

$$\Lambda_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n-1)$$

obtained directly in [1].

4. Conclusion

In this paper, we have proved that the equations for the Szebehely Problem extended to holonomic systems with n degrees of freedom can be obtained by means of Jacobi's formulation of the least action principle.

Acknowledgments

For several kind and useful suggestions we wish to express our gratitude to Professor Victor Szebehely.

References

- [1] Melis, A. and Piras, B.: 1984, Celest. Mech. **32**, 87.
- [2] Szebehely, V.: 1974, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, **XLIV**, Suppl., 31.
- [3] Puel, F.: 1984, Celest. Mech. **32**, 349.
- [4] Goldstein, H.: 1950, Classical Mechanics, Chapter 7, 228, Addison Wesley Publ. Co. Inc.

**ON SZEBEHELY'S PROBLEM EXTENDED
TO HOLONOMIC SYSTEMS
WITH A GIVEN INTEGRAL OF MOTION**

Antonio Melis, Francesco Borghero

Estratto da:

MECCANICA

Journal of the Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics AIMETA

Vol. 21 • No. 2 • June 1986

PITAGORA EDITRICE BOLOGNA

ON SZEBEHELY'S PROBLEM EXTENDED TO HOLONOMIC SYSTEMS WITH A GIVEN INTEGRAL OF MOTION*

Antonio Melis,** Francesco Borghero**

SOMMARIO. Assegnata una famiglia di curve nello spazio S_n delle configurazioni di un sistema oloonomo conservativo ad n gradi di libertà, si determinano le equazioni differenziali alle quali deve soddisfare il potenziale delle forze applicate affinché il punto rappresentativo del sistema possa descrivere una qualunque delle traiettorie appartenenti alla data famiglia. Si scrive poi l'espressione del potenziale supponendo che sia assegnato, oltre l'integrale dell'energia, un integrale primo del moto, lineare nelle velocità lagrangiane. Infine si ricavano le condizioni di compatibilità fra la costante dell'energia E , il parametro α che interviene nell'integrale primo e le $n-1$ costanti geometriche $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ che caratterizzano la famiglia di curve. Si conclude con due semplici esempi che illustrano quanto esposto.

SUMMARY. We consider a family of curves in the n -dimensional configuration space S_n of a holonomic system with n degrees of freedom. We obtain first-order partial differential equations for the potential function U of forces under which any trajectory belonging to the given family of curves can be described by the representative point of the system. We write the potential function U supposing that, in addition to the energy integral, a first integral of motion linear in the lagrangian velocities is assigned. Next we obtain the compatibility conditions between the energy constant E , the parameter α which appears in the first integral, and the $n-1$ geometric constants $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ which characterize the family of trajectories. Finally we discuss two simple examples.

1. INTRODUCTION

The study of orbits of artificial satellites can be used for the determination of the Earth's, Moon's etc. gravitational fields. In this contest, during the International Meeting on «Earth's Rotation by Satellite Observations», (Cagliari, April 1973), V. Szebehely [1] took again the classical inverse problem of dynamics consisting in the determination of potential function of forces under which any trajectory belonging to a given family of curves can be described by a particle. He obtained, in two-dimensional case, a linear, first order partial differential equation for the unknown potential function.

* Work performed under the auspices of G.N.F.M.-C.N.R., Italy.

** Dipartimento di Matematica, Università di Cagliari, 09100 Cagliari (Italy).

The problem has been dealt with by several different authors in both two and three-dimensional case and later generalized for the case of n dimensions. A list of works sufficiently complete dealing with this subject is given in the References.

Recently [16] the problem has been extended to holonomic systems having n degrees of freedom by assigning an $(n-1)$ -parametric family of trajectories of the representative point of the system in the configuration space S_n and the $n-1$ first order linear differential equations, which must be satisfied by the potential U compatible with the given family of trajectories, have been written.

In the present note again we have obtained $n-1$ equations for the potential function U which, unlike what was done in [16], are here written in general form without favoring any coordinate with respect to others. Thus, for the equations $f_\mu(q^1, q^2, \dots, q^n) = c_\mu$, ($\mu = 1, 2, \dots, n-1$), representing the given family of trajectories, those conditions which in [16] were necessary to define $q^1, q^2, \dots, q^{n-1}$ as functions of the remaining q^n , are not required in this case. Moreover we now consider the problem supposing as given, in addition to the surely existing energy integral, a first integral of motion linear in the lagrangian velocities.

Furthermore, we establish $n-1$ compatibility relations among the $n+1$ parameters which appear in the problem, $n-1$ of which are the geometric constants $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ characterizing the family of trajectories, another is the mechanical constant E representing total energy of the system and the $(n+1)^{\text{th}}$ is the constant α of the first integral assigned.

We then illustrate two simple examples.

2. THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE POTENTIAL U

It is known that the Lagrange equations governing the motion of a holonomic system, having n degrees of freedom with constraints independent of time, can be written - using the Einstein summation convention - in the following form:

$$\ddot{q}^h = Q^h - \Gamma_{ks}^h \dot{q}^k \dot{q}^s \quad (h, k, s = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Coefficients Γ_{ks}^h are the Christoffel symbols of the second kind expressed by:

$$\Gamma_{ks}^h = a^{hi} \Gamma_{k,i}^h$$

where the quantities

$$\Gamma_{k,i}^h = \frac{1}{2} (\partial_k a_{si} + \partial_i a_{ks} - \partial_s a_{ki}), \quad \left(\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial q^k} \right)$$

are Christoffel symbols of the first kind, and in which the coefficients $a^{hi} = \frac{\text{cof. } a_{ih}}{\det [a_{ih}]}$ are the reciprocals of the a_{ih} 's which appear in the kinetic energy of the system:

$$T = \frac{1}{2} a_{hk} (q^1, q^2, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k. \quad (2)$$

The Q^h 's are given by $a^{hi} Q_i$, since the Q_i 's are the generalized components of applied forces.

In the configuration space S_n let us assign an $(n-1)$ parametric family of trajectories:

$$f_\mu(q^1, q^2, \dots, q^n) = c_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n-1), \quad c_\mu = \text{const.} \quad (3)$$

We propose to find a potential U of the conservative forces under which any trajectory belonging to the family (3) can be described by the representative point P of the system. The vector velocity $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n)$ of $P \in S_n$, can be expressed as follows:

$$\dot{q} = M(q) \omega \quad (4)$$

where at present $M(q)$ is an arbitrary function of $q = (q^1, q^2, \dots, q^n)$ and ω is the unit vector of the tangent to the trajectory.

Since the energy integral is available:

$$T - U = E \quad (5)$$

using the relations (2) and (4) we obtain

$$U(q) = \frac{1}{2} M^2(q) a_{hk}(q) \omega^h \omega^k - E \quad (6)$$

which is analogous to the expression written in [21] from A. S. Galiullin regarding a particular inverse problem of dynamics.

Differentiating twice relations (3) with respect to time we obtain:

$$\partial_h f_\mu \ddot{q}^h + \partial_{ks} f_\mu \dot{q}^k \dot{q}^s = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\left(\partial_{ks} \equiv \frac{\partial^2}{\partial q^k \partial q^s} \right)$$

and introducing the lagrangian velocities obtained from (4) and the $\dot{q}^h$'s given by (1) we get:

$$a^{hi} \partial_h f_\mu Q_i + M^2(q) (\partial_{ks} f_\mu - \Gamma_{ks}^h \partial_h f_\mu) \omega^k \omega^s = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n-1)$$

Now expressing $M^2(q)$ by (6) and keeping in mind that in the conservative case $Q_i = \partial_i U$, we finally establish the equations:

$$A_\mu^i \partial_i U + 2(U + E) W_\mu = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n-1) \quad (7)$$

where

$$A_\mu^i = a^{hi} \partial_h f_\mu;$$

$$W_\mu = \frac{1}{a_{pr} \omega^p \omega^r} (\partial_{ks} f_\mu - \Gamma_{ks}^h \partial_h f_\mu) \omega^k \omega^s.$$

This is a system of $n-1$ linear partial differential equations

of first order in the unknown function U , and it is the natural generalization of Szebehely's equation [1] in the case of a holonomic system having n degrees of freedom with time-independent constraints.

3. POTENTIAL FUNCTION U COMPATIBLE WITH THE ASSIGNED FAMILY OF TRAJECTORIES AND A GIVEN FIRST INTEGRAL

Now, let us assign a first integral of motion, linear in the lagrangian velocities $\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n$ of the type:

$$\lambda \cdot \dot{q} = \alpha \quad (\alpha = \text{const.}) \quad (8)$$

expressed as the scalar product of the two vectors $\dot{q}$ and $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ being given functions of $q^1, q^2, \dots, q^n$.

The existence of such a first integral may be suggested by the kind of forces acting on the system (as for example takes place when a central force act on a particle, because then the integral of angular momentum is available) or by special «symmetries» in the system which require the presence of cyclic coordinates.

Introducing (4) in the integral (8) we have:

$$M(q) = \frac{\alpha}{\lambda_h \omega^h} \quad (9)$$

which specifies the previously undetermined function $M(q)$. Substituting (9) in (6) we obtain the potential function:

$$U(q) = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{a_{hk} \omega^h \omega^k}{(\lambda_h \omega^h)^2} - E. \quad (10)$$

Remark. Introducing the matrices:

$$A = [a_{hk}], \quad \Omega = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^n \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

and denoting by $\tilde{\Omega}$ and $\tilde{\Lambda}$ the transposes of Ω and Λ , (10) can also be written:

$$U(q) = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\tilde{\Omega} A \Omega}{(\tilde{\Lambda} \Omega)^2} - E. \quad (10')$$

It can thus be observed that the dependence of U on the given family of trajectories is expressed in (10') by means of the matrix Ω and its dependence on the assigned first integral by means of the matrix Λ and the scalar α ; while the matrix A characterizes the material structure of the system. The constants E and α are to be intended as functions of the geometric parameters $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ because they depend on the trajectory.

4. COMPATIBILITY RELATIONS FOR THE PARAMETERS OF THE PROBLEM

We now propose to determine the relations that must be satisfied by the energy constant E and the parameter α which

appear in expression (8) of the given first integral so that point P representing the system describes a trajectory belonging to the family of curves (3) in the configuration space S_n . This is obtained by letting expression (10) of potential U satisfy the system of differential equations (7).

E and α , as previously observed in n. 3, must be considered dependent on the geometric parameters $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$. Introducing into equations (7) the expressions of U and $\partial_i U$ deduced by (10) we obtain the required compatibility conditions:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} P(q) \frac{\partial \alpha^2}{\partial c_\nu} - \frac{\partial E}{\partial c_\nu} \right\} \psi_{\mu\nu} + \alpha^2 R_\mu = 0, \quad (11)$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, n-1)$$

where:

$$P(q) = \frac{a_{rs} \omega^r \omega^s}{(\lambda_r \omega^r)^2}, \quad \psi_{\mu\nu} = A_\mu^i \partial_i f_\nu,$$

$$R_\mu = \frac{1}{2} \Phi_\mu + P(q) W_\mu, \quad \Phi_\mu = A_\mu^i \partial_i P.$$

We shall now show with some examples how sometimes equations (11), whenever α is assigned as a function of the c_μ 's allow us to determine the dependence of E on the c_μ 's and thus, by means of (10) and equations (3) of the family of curves, to give the final expression of potential U .

5. EXAMPLES

a) Let us consider the particular system with two degrees of freedom ($n = 2$) constituted of a particle of mass m describing an orbit about a centre of force coincident with the origin of a given rectangular system of reference Oxy . Of course, the configuration space S_2 is with this choice identical to the plane of motion.

Let us assign in S_2 the one-parametric family of trajectories:

$$f(x, y) = c. \quad (3')$$

Keeping in mind the existence of the first integral of angular momentum:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \alpha \quad (8')$$

the $n - 1$ compatibility equations (11) for parameters E , α and c are reduced to the single equation:

$$\frac{dE}{dc} = \frac{1}{2} m \frac{d\alpha^2}{dc} P(x, y) + m\alpha^2 Q(x, y) \quad (12)$$

where

$$P(x, y) = \frac{f_x^2 + f_y^2}{(xf_x + yf_y)^2}$$

$$Q(x, y) = \frac{f_x(xf_{yy} - f_x - yf_{xy}) + f_y(yf_{xx} - f_y - xf_{xy})}{(xf_x + yf_y)^3}$$

and by (10) the expression of the potential is:

21 (1986)

$$U(x, y) = -\frac{1}{2} m \alpha^2 P(x, y) - E. \quad (13)$$

If in particular the family of trajectories (3') is given by the conic section with the center in 0:

$$ax^2 + by^2 = c$$

we show that if we assign suitably the parameter α as function of c , we obtain the well known potential of the linear restoring forces (or the potential of repulsive forces proportional to the distance from the center 0). In this case (12) becomes:

$$\frac{dE}{dc} = \frac{1}{2} m \frac{d\alpha^2}{dc} \frac{a^2 x^2 + b^2 y^2}{c^2} + m\alpha^2 \frac{b-a}{2c^3} (ax^2 - by^2).$$

If the dependence of α from c is:

$$\alpha = \left(\frac{k}{mab} c^2 \right)^{1/2}, \quad \left(\frac{k}{ab} = \text{const.} > 0 \right)$$

we obtain:

$$E = \frac{k(a+b)}{2ab} (ax^2 + by^2)$$

which leads, by (13), to the expression:

$$U(x, y) = -\frac{1}{2} k (x^2 + y^2).$$

b) We consider again the central motion, r, θ being now the polar coordinates of the particle.

The family of trajectories (3) in the configuration space S_2 is:

$$f(r, \theta) = c, \quad (3'')$$

where we assume, to simplify the calculation, r, θ as rectangular cartesian coordinates of the representative point of the particle in S_2 : relation (3'') represents both the family of the trajectories in S_2 and the corresponding family of orbits in the plane of motion.

The first integral of angular momentum is of course:

$$r^2 \dot{\theta} = \alpha.$$

Proceeding as in case (a), the expressions (11) become a single equation:

$$\frac{dE}{dc} = \frac{1}{2} m \frac{d\alpha^2}{dc} P(r, \theta) + m\alpha^2 Q(r, \theta) \quad (14)$$

where:

$$P(r, \theta) = \frac{f_\theta^2 + r^2 f_r^2}{r^4 f_r^2}, \quad Q(r, \theta) = \frac{f_r f_{\theta\theta} - f_\theta f_{r\theta}}{r^4 f_r^3}$$

Now, let us consider in S_2 the family of trajectories:

$$r(1 + e \cos \theta) = c,$$

73

to which corresponds in the plane of motion a family of conics with given eccentricity having one focus at the center of motion.

Now, we show that we obtain the Newtonian potential U , taking:

$$\alpha = \left(\frac{kc}{m} \right)^{1/2}, \quad (k = \text{const.} > 0).$$

In fact by (14) we have

$$E = - \frac{k}{2c} (1 - e^2)$$

and by (10):

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2} m \alpha^2 P(r, \theta) - E = \frac{k}{r}.$$

ACKNOWLEDGMENTS

We wish to express our gratitude to professors G. Aymerich and V. Cantoni for their helpful suggestions.

Received: August 30, 1985; in revised form: February 7, 1986.

REFERENCES

- [1] SZEBEHELY V., *On the Determination of the Potential by Satellite Observations*, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, XLIV, Suppl. 1974, pp. 31-35.
- [2] MORRISON F., *Modification of an Equation of Szebehely*, Celest. Mech., 16, 1977, pp. 39-40.
- [3] BROUCKE R. and LASS H., *On Szebehely's Equation for the Potential of a Prescribed Family of Orbits*, Celest. Mech., 16, 1977, pp. 215-225.
- [4] MELIS A., *Sul potenziale delle forze relativo ad una assegnata famiglia di orbite*, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, XLIX, 1979, pp. 157-164.
- [5] SZEBEHELY V., LUNDBERG J. and MCGAHEE W.J., *Potential in the Central Bar Structure*, Astrophys. J., 239, 1980, pp. 880-881.
- [6] MERTENS R., *On the Determination of the Potential Energy of a Particle describing Orbits in a given Surface*, ZAMM, 61, 1981, pp. 252-253.
- [7] SZEBEHELY V. and BROUCHE R., *Determination of the Potential in a Synodic System*, Celest. Mech., 24, 1981, pp. 23-26.
- [8] MOLNAR S., *Applications of Szebehely's Equation*, Celest. Mech., 25, 1981, pp. 81-88.
- [9] MELIS A. and PIRAS B., *On a Generalization of Szebehely's Problem*, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, LII, 1982, pp. 81-88.
- [10] ERDI B., *Generalization of Szebehely's Equation for three Dimensions*, Celest. Mech. 28, 1982, pp. 209-218.
- [11] BOZIS G., *Generalization of Szebehely's Equation*, Celest. Mech., 29, 1983, pp. 329-334.
- [12] VARADI F. and ERDI B., *Existence of the Solution of Szebehely's Equation in three Dimensions using a two parametric Family of Orbits*, Celest. Mech., 30, 1983, pp. 395-405.
- [13] BOZIS G., *Determination of autonomous three Force Field from a two-parameter Family of Orbits*, Celest. Mech., 31, 1983, pp. 43-51.
- [14] BOZIS G., *Inverse Problem with two parametric Families of Planar Orbits*, Celest. Mech. 31, 1983, pp. 129-142.
- [15] XANTHOPOULOS B.C. and BOZIS G., *The Planar Inverse Problem with Four Monoparametric Families of Curves*, Astron. Astrophys., 122, 1983, pp. 251-254.
- [16] MELIS A. and PIRAS B., *An Extension of Szebehely's Problem to Holonomic Systems*, Celest. Mech. 32, 1984, pp. 87-92.
- [17] PUEL F., *Formulation intrinsèque de l'équation de Szebehely*, Celest. Mech., 32, 1984, pp. 209-216.
- [18] PUEL F., *Equation de Szebehely et principes variationnels*, Celest. Mech. 32, 1984, pp. 349-353.
- [19] GONZALES-GASCON F., GONZALES-LOPEZ A. and PASQUAL-BRONCANO P.J., *On Szebehely's Equation and its Connection with Darboux's Whittaker's Equations*, Celest. Mech., 33, 1984, pp. 85-97.
- [20] BOZIS G., *Szebehely's Inverse Problem for Finite Symmetrical Material Concentrations*, Astron. Astrophys., 134, 1984, pp. 360-364.
- [21] GALIULLIN A.S., *Inverse problem of Dynamics*, Mir Publishers Moscow, 1984.
- [22] MELIS A. and PIRAS B., *An Observation of the Inverse Extended Problem of Szebehely*, Celest. Mech., 36, 1985, pp. 83-87.
- [23] BOZIS G. and MERTENS R., *On Szebehely's Inverse problem for a Particle Describing Orbits on a Given Surface*, ZAMM 65, 1985, pp. 383-384.

ON SZEBEHELY'S PROBLEM FOR HOLONOMIC SYSTEMS INVOLVING GENERALIZED POTENTIAL FUNCTIONS*

FRANCESCO BORGHERO and ANTONIO MELIS

Department of Mathematics, University of Cagliari, Italy

(Received: 18 January 1990; accepted: 20 August 1990)

Abstract. We consider the problem of finding the generalized potential function $V = U_1(q^1, q^2, \dots, q^n)\dot{q}^1 + U(q^1, q^2, \dots, q^n)$ compatible with prescribed dynamical trajectories of a holonomic system. We obtain conditions necessary for the existence of solutions to the problem: these can be cast into a system of $n-1$ first order nonlinear partial differential equations in the unknown functions $U_1, U_2, \dots, U_n, U$. In particular we study dynamical systems with two degrees of freedom. Using 'adapted' coordinates on the configuration manifold M_2 we obtain, for potential function $U(q^1, q^2)$, a classic first kind of Abel ordinary differential equation. Moreover, we show that, in special cases of dynamical interest, such an equation can be solved by quadrature. In particular we establish, for ordinary potential functions, a classical formula obtained in different way by Joukowski for a particle moving on a surface.

Keywords. Inverse problem, generalized potential, holonomic systems.

1. Introduction

In previous papers [1–4] we have considered, within the framework of the inverse problem of Lagrangian dynamics, the so-called:

GENERALIZED SZEBEHELY'S PROBLEM. *Let S be a holonomic system with n degrees of freedom subject to scleronomic perfect bilateral constraints. We want to find the potential function $U(q^1, q^2, \dots, q^n)$ under which a family of curves, given on the configuration manifold M_n , is such that any of these curves can be described as a dynamical trajectory of the representative point.*

The object of this work is to investigate the analogous problem for generalized potential functions, which are linearly related to Lagrangian velocities and hence are of the type:

$$V = U_1(q^1, q^2, \dots, q^n)\dot{q}^1 + U(q^1, q^2, \dots, q^n), \quad (1)$$

where $U_1, U_2, \dots, U_n, U$ depend uniquely on the Lagrangian coordinates $q^1, q^2, \dots, q^n$. Here and in the following, the summation convention on the repeated superscripts and subscripts has been used. The analogous problem for a particle has been considered in [5–7].

According to the approach used in [2] for a similar problem concerning potential functions, the necessary conditions for the representative point to describe a trajectory belonging to a prescribed family are obtained in the form of a system of $n-1$

* Work performed with the support of the Gruppo Nazionale di Fisica Matematica (G.N.F.M.) of the Italian National Research Council.

nonlinear partial differential relations (see [14] Section 2) involving the $n + 1$ functions $U_1, U_2, \dots, U_n, U$.

For a broad class of holonomic systems subject to forces derived from an ordinary potential function where cyclic coordinates exist, these relations constitute a system of nonlinear partial differential equations in the only unknown function $U(q^1, q^2, \dots, q^n)$.

In particular, holonomic systems whose configuration space is a two-dimensional manifold M_2 will be considered in Section 3.

The analysis of these systems leads to a nonlinear partial differential equation ([16] Section 3). This result generalizes a linear equation obtained by R. Mertens [8] in the study of a particle moving on a given surface and subject to forces derived from an ordinary potential. Our extension is concerned with holonomic systems in two degrees of freedom acted on by a generalized potential. In addition, by suitably choosing the coordinates on M_2 , the problem of integrating the partial differential equation obtained for the part $U(q^1, q^2)$ of the potential function (1) that does not depend on the $\dot{q}$'s, may be reduced to solving a classical 1st kind of Abel ordinary differential equation ([32] Section 4).

This type of differential equations are probably among the simplest first order equations besides those of Riccati. They are of large interest in analysis and have been thoroughly investigated by Abel, Appell, Liouville, Boutroux and others. In our opinion it is of some relevance that these equations find a concrete application in the generalized Szebehely problem, which constitutes the subject of this note.

Following Kamke [9] we develop a procedure for solving this equation in the general case. Next, for particular cases which are of interest from the dynamical point of view, we point out that the same equation can be solved by quadrature, when its coefficients satisfy prescribed conditions.

For ordinary potential functions it is shown that Abel's equation reduces to Bernoulli's equation, the integration of which leads to a classical formula established by Joukowski [10] for a particle moving on a surface. *This formula therefore also holds for arbitrary holonomic systems with two degrees of freedom.*

Finally, we observe that the concept of generalized potential functions is not purely theoretical but is encountered in several applications. Apart from the cases usually mentioned concerning electromagnetic forces acting on charged particles (Lorentz forces), or for forces that appear in the rotating frames (Coriolis forces), generalized potentials also appear in connection with the motion of holonomic systems subject to forces derived from ordinary potential functions, whenever cyclic coordinates exist [11]. This is the case of the motion of rigid bodies with gyroscopes inserted into their internal structure, or equally interesting, of rigid bodies with cyclic inner motion (e.g. the Earth) studied by V. Volterra [12].

2. Partial Differential Relations for the Generalized Potential Function

Suppose we are given a holonomic system with n degrees of freedom subjected to

generalized forces of the type:

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

where the Q_i are independent of the $\dot{q}^i$; U must be expressed as in (1).

Substituting (1) in the expressions (2) for Q_i , we obtain:

$$Q_i = \gamma_{ih} \dot{q}^h + \partial_i U, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i} \right) \quad (3)$$

where

$$\gamma_{ih}(q) = \partial_i U_h - \partial_h U_i, \quad (\gamma_{ih} = -\gamma_{hi}). \quad (4)$$

In (3) the generalized forces are thus decomposed into the part $\partial_i U$, which depends on the ordinary potential function $U(q)$, and into the term $\gamma_{ih} \dot{q}^h$, which might be considered to represent the gyroscopic forces.

As is well known, under these circumstances, Jacobi's generalized energy integral holds:

$$T - U = E \quad (5)$$

where only the term $U(q)$ of expression (1) for the generalized potential function appears.

The Lagrangian equations of motion for holonomic systems with perfect, time-independent constraints, may be written in the following normal form:

$$\ddot{q}^k = Q^k - \Gamma^k_{jh} \dot{q}^j \dot{q}^h \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

where Γ^k_{jh} are the Christoffel symbols of the 2nd kind expressed as

$$\Gamma^k_{jh} = \frac{1}{2} a^{ki} (\partial_j a_{hi} + \partial_h a_{ji} - \partial_i a_{jh}) \quad (7)$$

and

$$Q^k = a^{ki} Q_i.$$

The coefficients $a^{ki} = (\text{cof. } a_{ik}) / [\det(a_{ik})]$ are reciprocals of the coefficients a_{ik} of the given kinetic energy of the material system:

$$T = \frac{1}{2} a_{ik}(q) \dot{q}^i \dot{q}^k. \quad (8)$$

Let us suppose once again that we have, in the configuration manifold M_n , a prescribed $n - 1$ parametric family of dynamical trajectories of the system's representative point:

$$f_\mu(q^1, q^2, \dots, q^n) = c_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (9)$$

where f_μ are functions of at least class C^2 , defined in a open set of M_n and functionally

independent, i.e. such that their Jacobian matrix, with respect to q , has maximum rank:

$$\text{rank} \left(\frac{\partial f_\mu(q)}{\partial q^h} \right) = n - 1, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n-1), \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

The velocity vector $\mathbf{v} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n)$ of the representative point $P \in M_n$ can be expressed, as in [2], as follows:

$$\dot{q}^h = M(q)\tau^h, \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

where $M(q)$ is an arbitrary function of $q^1, q^2, \dots, q^n$ and τ^h are the contravariant components, according to the local base, of the unit tangent vector $\boldsymbol{\tau}$, given by:

$$\tau^h = \pm \frac{(-1)^{h+1}\Delta^h}{\sqrt{(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta^i\Delta^j}}, \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

with the condition:

$$|\boldsymbol{\tau}| = a_{hk}\tau^h\tau^k = 1.$$

The double sign in (11) is related to the two different ways of orienting the trajectory. Δ^h is the minor obtained from the Jacobian matrix:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(q)}{\partial q^1} & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q^2} & \dots & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q^n} \\ \frac{\partial f_{n-1}(q)}{\partial q^1} & \frac{\partial f_{n-1}(q)}{\partial q^2} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}(q)}{\partial q^n} \end{pmatrix}$$

deleting the h th column.

Now, by generalizing a procedure introduced by Szebehely in [13], we differentiate Equation. (9) twice with respect to time and obtain:

$$\partial_{hk}f_\mu\dot{q}^h\dot{q}^k + \partial_kf_\mu\ddot{q}^h = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n-1), \quad \left(\partial_{hk} = \frac{\partial^2}{\partial q^h \partial q^k} \right). \quad (12)$$

Substituting in (12) the expressions for $\dot{q}^h, \ddot{q}^k$ given by (10) and (6), taking (3), (4) and (7) into account we have:

$$a^{hk}\partial_kf_\mu\partial_hU + M^2(q)(\partial_{jh}f_\mu - \Gamma^k_{jh}\partial_kf_\mu)\tau^j\tau^h + M(q)a^{hk}\partial_kf_\mu\gamma_{ih}\tau^i = 0$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, n-1). \quad (13)$$

Due to the first integral (5), the function $M(q)$ for (8) may be written:

$$M(q) = \pm\sqrt{2(E+U)}$$

which, substituted in (13) gives:

$$A^h_\mu\partial_hU + 2(E+U)W_\mu \pm \sqrt{2(E+U)}\Omega_\mu = 0$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, n-1), \quad (14)$$

where

$$\begin{aligned} A_{\mu}^h &= a^{hk} \partial_k f_{\mu} & W_{\mu} &= (\partial_{jh} f_{\mu} - \Gamma_{jh}^k \partial_k f_{\mu}) \tau^j \tau^h \\ \Omega_{\mu} &= a^{hk} \partial_k f_{\mu} \gamma_{ih} \tau^i = A_{\mu}^h \gamma_{ih} \tau^i, & \gamma_{ih} &= \partial_i U_h - \partial_h U_i. \end{aligned} \quad (15)$$

Equation (14) is a system of $n - 1$ nonlinear partial differential relations in the unknown functions $U(q)$, $U_1(q)$, $U_2(q)$, $\dots$, $U_n(q)$ and it is the generalization, in the sense of Szebehely, of (7) in [2] for holonomic systems subject to forces derived from a generalized potential function. The energy E which appears in (14) is constant on every dynamical trajectory belonging to the configuration manifold M_n , but generally varies from one trajectory to another. Hence E is regarded as a known function of $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ which parametrizes the prescribed family of curves according to (9).

The relations (14), given the family of curves (9), provide necessary conditions that must be satisfied by the functions $U(q)$, $U_1(q)$, $U_2(q)$, $\dots$, $U_n(q)$ in order that the representative point describes one of the curves (9). These show that a very broad class of functions exists, satisfying the problem set; in fact we can for example give any n from among the $U_1, U_2, \dots, U_n$, U and by means of (14) derive the system of partial differential equations for the others.

If, for instance, we assign the functions (gyroscopic terms):

$$\gamma_{ih}(q) = \partial_i U_h - \partial_h U_i, \quad (i, h = 1, 2, \dots, n)$$

Equations (14) provide a system of $n - 1$ 1st order partial differential equations in the unknown function $U(q^1, q^2, \dots, q^n)$ which is nonlinear due to the presence of the terms $\sqrt{2(E + U)} \Omega_{\mu}$. This is certainly the most interesting case because the gyroscopic terms γ_{ih} may be regarded as automatically assigned in holonomic systems with cyclic coordinates.

In the sequel the attention will be focused in particular on holonomic systems with two degrees of freedom which can be studied in detail and for which interesting results are obtained.

3. Holonomic Systems with Two Degrees of Freedom

We consider here a holonomic system with two degrees of freedom whose configuration manifold reduces to a two-dimensional surface M_2 with metric given by the kinetic energy T :

$$ds^2 = 2T(dt)^2 = a_{11} du^2 + 2a_{12} du dv + a_{22} dv^2,$$

where u, v , the Lagrangian parameters of the system, are taken as Gaussian coordinates on M_2 and the coefficients $a_{\alpha\beta}$ are obviously known functions of u, v .

The given family of curves (9) lying in M_2 now reads:

$$f(u, v) = \text{const.}$$

Thus the problem leads, for the generalized potential function:

$$V(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = U_1(u, v) \dot{u} + U_2(u, v) \dot{v} + U(u, v)$$

to the single equation:

$$A^1 \frac{\partial U}{\partial u} + A^2 \frac{\partial U}{\partial v} + 2(E + U)W \pm \sqrt{2(E + U)}\Omega = 0, \quad (16)$$

where, from (15), we have:

$$\begin{aligned} A^1 &= \frac{1}{a}(a_{22}f_u - a_{12}f_v), & A^2 &= \frac{1}{a}(a_{11}f_v - a_{21}f_u) \\ a &= \det(a_{\alpha\beta}) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, & f_u &= \frac{\partial f}{\partial u}, & f_v &= \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned} \quad (17)$$

with

$$\begin{aligned} W &= (f_{uu} - \Gamma^1_{11}f_u - \Gamma^2_{11}f_v)(\tau^1)^2 + 2(f_{uv} - \Gamma^1_{21}f_u - \Gamma^2_{21}f_v)\tau^1\tau^2 + \\ &\quad + (f_{vv} - \Gamma^1_{22}f_u - \Gamma^2_{22}f_v)(\tau^2)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Omega = \gamma_{12}(A^2\tau^1 - A^1\tau^2), \quad \gamma_{12} = \frac{\partial U_2}{\partial u} - \frac{\partial U_1}{\partial v}. \quad (19)$$

Making use of (11) we get:

$$\tau^1 = \pm \frac{f_v}{\sqrt{a\Delta_1 f}}, \quad \tau^2 = \mp \frac{f_u}{\sqrt{a\Delta_1 f}} \quad (20)$$

which, substituted in (18) and (19), gives:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{a\Delta_1 f} \{ (f_{uu}f_v^2 - 2f_{uv}f_u f_v + f_{vv}f_u^2) - (\Gamma^1_{11}f_u + \Gamma^2_{11}f_v)f_v^2 + \\ &\quad + (\Gamma^1_{21}f_u + \Gamma^2_{21}f_v)f_u f_v - (\Gamma^1_{22}f_u + \Gamma^2_{22}f_v)f_u^2 \} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\Delta_1 f}{a}} \gamma_{12}, \quad (22)$$

where $\Delta_1 f$ is the Beltrami differential parameter of the 1st order of the function f given by (see [14] p. 155):

$$\Delta_1 f \equiv a^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \frac{\partial f}{\partial q^\beta} = \frac{1}{a}(a_{11}f_v^2 - 2a_{12}f_u f_v + a_{22}f_u^2). \quad (23)$$

If we now use the well-known Bonnet formula for the geodesic curvature K_f of the curves on a surface (see [14] p. 190)

$$K_f = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a_{12}f_v - a_{22}f_u}{\sqrt{a\Delta_1 f}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a_{12}f_u - a_{11}f_v}{\sqrt{a\Delta_1 f}} \right) \right\} \quad (24)$$

Equation (18) may be written:

$$W = -\sqrt{\Delta_1 f} K_f. \quad (25)$$

Due to (17), (22), (25) the differential Equation (16) has the form:

$$\Delta(f, U) - 2(E + U)\sqrt{\Delta_1 f K_f} \mp \sqrt{2(E + U)} \sqrt{\frac{\Delta_1 f}{a}} \gamma_{12} = 0, \quad (26)$$

where $\Delta(f, U)$ is the Beltrami mixed differential parameter of the 1st order of the two functions f and U , defined as follows (see [14] p. 155):

$$\Delta(f, U) \equiv a^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \frac{\partial U}{\partial q^\beta} = \frac{1}{a} \left[(a_{22} f_u - a_{12} f_v) \frac{\partial U}{\partial u} + (a_{11} f_v - a_{21} f_u) \frac{\partial U}{\partial v} \right]. \quad (27)$$

Equation (26) constitutes the generalization of the result of R. Mertens [8] already mentioned in the Introduction.

4. Integration of Partial Differential Equation for the Potential Function U

Assuming that the gyroscopic term γ_{12} is known, Equation (26) becomes a nonlinear partial differential equation for the function $U(u, v)$. The study of its integration is greatly simplified if an adapted system of coordinates is used on the configuration manifold M_2 ; i.e. a system where the prescribed trajectories are chosen as the first family of coordinate lines

$$f(u, v) = q = \text{const.} \quad (28)$$

the second family being given by the curves orthogonal to (28):

$$h(u, v) = p = \text{const.}$$

The representative point in M_2 is now determined by a pair (p, q) , the Joukowski coordinates, in terms of which the metric of M_2 reads:

$$ds^2 = a_{11} dp^2 + a_{22} dq^2$$

with a_{11} and a_{22} being known functions of p and q . Since:

$$f_u = \frac{\partial q}{\partial p} = 0, \quad f_v = \frac{\partial q}{\partial q} = 1,$$

all the formulae previously established are considerably simplified. In this adapted system of coordinates, Equation (26) becomes:

$$\frac{\partial U}{\partial q} + 2(E + U) \frac{\partial}{\partial q} \ln \sqrt{a_{11}} \mp \sqrt{2(E + U)} \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a_{11}}} = 0 \quad (29)$$

Since γ_{12} is known, the above equation, involving only the derivative $\partial U / \partial q$ can be regarded as an ordinary nonlinear differential equation in the unknown function $U(p, q)$ where q is an independent variable, p a parameter, and where E is a known function of f : $E = E(f) = E(q)$. Letting

$$2[E(x) + U(p, x)] = \frac{1}{y^2(p, x)}, \quad (x = q) \quad (30)$$

we have, by differentiating with respect to x :

$$U' = -\frac{y'}{y^3} - E'(x). \quad (31)$$

Taking (30) and (31) into account, Equation (29) becomes the 1st order equation:

$$y' = f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3, \quad (32)$$

where

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\sqrt{a_{22}} K_f = \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{a_{11}} \\ f_2(x) &= \mp \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \\ f_3(x) &= -E'(x). \end{aligned} \quad (33)$$

It is interesting to note that the problem of integration of Equation (29) reduces to solving a classical Abel ordinary differential equation of the first kind, which has been extensively studied in the literature (see [9] for references).

We will recall in broad lines the approach for studying this equation, distinguishing four basic cases which appear as the most relevant for the problem dealt with here.

5. Integration of Abel's Equation

(a) THE GENERAL CASE ($f_1(x) \neq 0$, $f_2(x) \neq 0$, $f_3(x) \neq 0$)

In this case the Abel Equation (32) is:

$$y' = \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{a_{11}} y \mp \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a_{11}}} y^2 - E'(x)y^3. \quad (34)$$

In agreement with the procedure indicated in Kamke [9], we perform the transformation:

$$y(x) = \sqrt{a_{11}} \eta(\xi) \quad (35)$$

ξ being a new variable, defined as follows:

$$\xi = \mp \int \gamma_{12}(x) dx \quad (36)$$

and $\eta(\xi)$ is a function of ξ to be determined.

Differentiating (35) with respect to x we have:

$$y' = \sqrt{a_{11}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{a_{11}} \eta(\xi) \mp \gamma_{12} \frac{d\eta}{d\xi} \right),$$

where ξ is regarded as a function of x by (36). If we now substitute the above

expression for y' in (34), keeping (35) in mind, we get:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm \frac{a_{11}}{\gamma_{12}} E'(x)\eta^3 + \eta^2 \quad (37)$$

where the coefficient $\pm(a_{11}/\gamma_{12})E'(x)$ depends on x through (36). Now letting:

$$\eta = -\left(t \frac{d\xi}{dt}\right)^{-1} \quad (38)$$

by differentiating with respect to t we have:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta^2 - t^2 \eta^3 \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

which substituted in (37) and taking $\eta \neq 0$, gives:

$$t^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} \pm \frac{a_{11}}{\gamma_{12}} E'(x) = 0. \quad (39)$$

If we find $\xi(t)$ from (39) we get $\eta(\xi)$ from (38), which substituted into (35) provides the solution to Abel's equation.

(b) THE CURVES OF THE PRESCRIBED FAMILY ARE GEODESICS ($f_1(x) = 0$, $f_2(x) \neq 0$, $f_3(x) \neq 0$)

Let us now consider the particular case, of interest from a dynamical point of view, where the curves of the given family of trajectories are geodesics of M_2 . It is well known that geodesics are the trajectories of a forceless motion. However they are also the dynamical trajectories of those particular motions for which the Lagrangian force Q , derived from an ordinary or generalized potential, is tangent to the geodesics themselves. This is exactly the case we dealt with.

However, it is worth noting that the problem is reducible in some cases to quadratures, as will be shown.

Indeed, since the geodesics of a surface M_2 are characterized by the fact that in each of their points the geodesic curvature K_f is zero, Abel's equation becomes:

$$y' = \mp \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a_{11}}} y^2 - E'(x)y^3. \quad (40)$$

Equations of this type have been investigated by A. Chiellini [15]; using his results, we can give the following

PROPOSITION. Assume that the following relationship holds:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E'(x)\sqrt{a_{11}}}{\gamma_{12}} \right) = -k \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \quad (41)$$

where the constant k can take one of the values:

$$k_1 = \frac{n-2m+3}{(m-3)^2}, \quad k_2 = \frac{n+2m+3}{(m+3)^2}, \quad m, n \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

Then the differential Equation (40) can be integrated with either of the two substitutions:

$$y = \mp \frac{\gamma_{12}(z+1)}{(m-3)\sqrt{a_{11}}E'(x)}, \quad y = \mp \frac{\gamma_{12}(z-1)}{(m+3)\sqrt{a_{11}}E'(x)}. \quad (43)$$

Hence it reduces respectively to one of the following equations with separate variables:

$$\frac{dz}{z+1} + \frac{(2-m-z)dz}{z^2+(m-1)z+n-m+1} = -k_1 \frac{\gamma_{12}^2(x)}{a_{11}(x)E'(x)} dx \quad (44)$$

$$\frac{dz}{z-1} - \frac{(2+m+z)dz}{z^2+(m+1)z+n-m+1} = -k_2 \frac{\gamma_{12}^2(x)}{a_{11}(x)E'(x)} dx \quad (45)$$

where the quadrature of the left-hand sides is immediate.

The actual calculations for finding the potential function can of course be performed in detail for the real cases that arise in practice.

Observation. Note that the above procedure does not hold for the ordinary potential function because, since $\gamma_{12} = 0$, the condition (41) makes no more sense. In this case however, the Equation (40) we started from, becomes:

$$y' = -E'(x)y^3$$

that is readily integrable. Taking into account (31) and going back to the former coordinates, its general integral is:

$$U = \Phi(p)$$

i.e. the ordinary potential function depends uniquely on the variable p , as was to be expected, where $\Phi(p)$ is an arbitrary function on p .

(c) ORDINARY POTENTIAL FUNCTIONS: JOUKOWSKY'S FORMULA ($f_1(x) \neq 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) \neq 0$)

For the potential function in the usual sense, being $\gamma_{12} = 0$, Abel's Equation (34) reduces to a 3rd degree Bernoulli equation;

$$y' = \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{a_{11}} y - E'(x)y^3. \quad (46)$$

Integrating the Equation (46), and going back to the former variables p and q , we obtain:

$$U(p, q) = \Delta_1(p)\phi(p) - \Delta_1(p) \int E(q) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\Delta_1(p)} \right) dq, \quad (47)$$

where $\Delta_1(p)$ is the Beltrami differential parameter of the first order, and the constant of integration that appears in (47) must be thought here as an arbitrary function $\phi(p)$ of the variable p . The expression (47) coincides with a classic Joukowski formula [10] which therefore also holds for generic holonomic systems with two degrees of freedom and not only for a single particle moving on a surface.

(d) ISOENERGETIC TRAJECTORIES ($f_1(x) \neq 0$, $f_2(x) \neq 0$, $f_3(x) = 0$)

This last case arises if the given family of curves in M_2 is a bundle of isoenergetic curves [16], i.e. for which $E = \text{const.}$ and thus $E'(x) = 0$.

Abel's Equation (34) now becomes a 2nd degree Bernoulli Equation:

$$y' = \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{a_{11}} y \mp \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{a_{11}}} y^2. \quad (48)$$

Integrating Equation (48) and going back to the former variables p and q , we may write for the potential function:

$$U(p, q) = \frac{1}{2} \Delta_1(p) \left\{ \pm \int \gamma_{12}(p, q) dq + \psi(q) \right\}^2$$

where the Beltrami differential parameter of the 1st order is:

$$\Delta_1(p) = \frac{1}{a_{11}(p, q)}$$

and where $\psi(q)$ is an arbitrary function of p . Thus, in this case too, the problem is solved by quadratures.

Acknowledgement

The authors are very grateful to Professor Victor Szebehely for his kind attention to this work and for useful suggestions.

References

1. Melis, A. and Piras, B.: 'An extension of Szebehely's problem to holonomic systems', *Celest. Mech.*, **32** (1984), 87–92.
2. Melis, A. and Borghero, F.: 'On Szebehely's problem extended to holonomic systems with a given integral of motion', *Meccanica, J. Ital. Ass. of Theor. Appl. Mech.* **21** (1986), 71–74.
3. Borghero, F.: 'On the determination of forces acting on a particle describing orbits on a given surface', *Rend. di Matem. di Roma, Serie VII*, **6** (1986), 503–518.
4. Borghero, F.: 'Variational determination of the generalized Szebehely's equations', *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino*, **45** (1987), 125–135.
5. Melis, A. and Piras, B.: 'On a generalization of Szebehely's problem', *Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari*, **LII** (1982), 73–78.
6. Szebehely, V. and Broucke, R.: 'Determination of the potential in a synodic system', *Celest. Mech.*, **24** (1981), 23–26.
7. Bozis, G.: 'Generalization of Szebehely's equation', *Celest. Mech.*, **29** (1983), 329–334.

8. Mertens, R.: 'On the determination of the potential energy of a particle describing orbits in a given surface', *ZAMM*, **61** (1981), 252–253.
9. Kamke, E.: *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*. Becker & Erler, Kom-Ges, Leipzig (1942), pp. 24–26.
10. Whittaker, E. T.: *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge University Press (1937), pp. 109–111.
11. Gantmacher, F. R.: *Lectures in Analytical Mechanics*. Mir Publishers, Moscow (1975), pp. 78–82 and 242–248.
12. Volterra, V.: *Rotation des corps dans lesquels existent des mouvements internes*. Collection de Physique Mathématique, Fasc. IV, Gauthiers-Villars, Paris (1938).
13. Szebehely, V.: 'On the determination of the potential by satellite observations', *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, **XLIV**, Suppl. (1974), 31–35.
14. Eisenhart, L. P.: *An Introduction to Differential Geometry*, Princeton University Press (1947).
15. Chiellini, A.: *Sull'integrazione dell'equazione differenziale $y' + Py^2 + Qy^3 = 0$* . *Boll. Un. Mat. Ital.*, **10** (1931), 301–307.
16. Levi Civita, T. and Amaldi, U.: *Lezioni di Meccanica razionale*. Vol. II₂, Zanichelli, Bologna (1952), p. 502.

Inverse and Direct Problem of the Dynamics of Central Motions

F. BORGHERO – G. BOZIS – A. MELIS

RIASSUNTO: *Si studia il problema inverso della Dinamica (nel senso di Szebehely) e si stabilisce per esso un'equazione lineare del primo ordine alle derivate parziali in cui la funzione incognita è la componente radiale $F = F(r, \theta)$ di un campo di forze centrali (generalmente non conservativo) capace di generare, come orbite, le curve di un'assegnata famiglia monoparametrica. Si mostra che tale equazione è utile anche per il problema diretto ed in tal caso è interpretabile come un'equazione non lineare del secondo ordine del tipo di Monge-Ampère. Si ottiene inoltre una condizione necessaria e sufficiente affinché la data famiglia di orbite possa essere creata da un campo di forze conservativo $F = F(r)$. Inoltre si determina come la forza $F = F(r)$, il momento angolare e l'energia totale dipendano dalla assegnata famiglia di orbite.*

ABSTRACT: *For a given monoparametric family of orbits, a Szebehely-type inverse problem is solved i.e. a linear partial differential equation of the first order is written giving the radial component $F = F(r, \theta)$ of a central force (in general not conservative) creating the family. It is shown how this equation can be used also for direct problem considerations and that, in this case, it reads as second order nonlinear partial differential equation of the Monge-Ampère type. The equation is also used to provide conditions so that a preassigned monoparametric or two-parametric family of orbits can be generated by a conservative central force $F = F(r)$. The force $F(r)$ as well as the expressions for the angular momentum and the total energy dependence on the given family are found.*

KEY WORDS AND PHRASES: *Inverse Szebehely-type Problem of Dynamics – Central Motions – Equation of Monge-Ampère type – Monoparametric and two-parametric families of curves.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 70F20 – 70H35

1 - Introduction

A simple version of the inverse problem of Dynamics referring to the motion in the xy plane of one material point P of unit mass is formulated as follows: *A monoparametric family of curves*

$$(1) \quad f(x, y) = c$$

is given in advance and required are all potentials $V = V(x, y)$ which can allow for the creation of orbits with equation (1) traced by the point P .

For a preassigned dependence

$$(2) \quad E = E(f(x, y)) = E(c)$$

of the total energy E of the moving point P on each specific orbit corresponding to constant c , these potentials are given as solutions of Szebehely's first order linear partial differential equation

$$(3) \quad V_x + \gamma V_y + \frac{2\Gamma}{1 + \gamma^2}(E - V) = 0,$$

where

$$(4) \quad \gamma = \frac{f_y}{f_x}, \quad \Gamma = \gamma \gamma_x - \gamma_y.$$

Lettered subscripts, throughout this paper, denote partial differentiation with respect to the pertinent variables. The derivation of equation (3) was offered by SZEBEHELY [14] and later by Broucke and LASS [7], PUEL [11] and, with the notation used here, by BOZIS [2].

A free of energy second order partial differential equation, relating merely orbits and potentials was obtained from equation (3), in view of (2) also, by requiring that $E_y = \gamma E_x$, (BOZIS [3]). This equation reads

$$(5) \quad V_{xx} + kV_{xy} - V_{yy} + \lambda V_x + \mu V_y = 0,$$

with

$$(6) \quad k = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma}, \quad \lambda = \frac{\Gamma_y - \gamma \Gamma_x}{\gamma \Gamma}, \quad \mu = \lambda \gamma + \frac{3\Gamma}{\gamma}.$$

On the other hand WHITTAKER [16] defines *central forces* as forces (not necessarily conservative) acting on a particle and "*directed towards*

or from a fixed centre" that can be assumed as origin of the cartesian coordinate system. He then proceeds to put the question of obtaining the *magnitude* of the central force which can create the *single orbit*

$$(7) \quad f(x, y) = 0,$$

traced with a (constant) angular momentum value L . Whittaker, comes up with the result

$$(8) \quad F(x, y) = -L^2 r \frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(x f_x + y f_y)^3}$$

where $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. Actually Whittaker wrote this formula without the sign minus because he considered the magnitude $|\vec{F}|$ of an attractive force. Our formula (8), instead of the magnitude, give the *radial component* $F(x, y) = \pm |\vec{F}|$ of the central force and take into account both repulsive or attractive forces.

It is understood that the single orbit (7) can be classified as a member of various monoparametric families (1) and, in this sense, different force fields (8) may be obtained, all creating the same orbit (7) traced with the same value of L (BOZIS and BLAGA, [5]). Besides, it is meaningless to look at formula (8) as offering $F(x, y)$ *only at the points* (x, y) *of the* Oxy *plane satisfying equation* (7). It would also be erroneous to think of (8) as giving the *radial component* of the central force *at all points of the* xy *plane*, unless we have in mind that *all the orbits* (1) *are traced with the same angular momentum value*. So, Whittaker's result (8) is valid for all members of the family (1), provided that it is interpreted as if the dependence

$$(9) \quad L = L(f(x, y)) = L(c)$$

is also given in advance.

The basic findings of this paper are the following:

(i) we shall show that the function $F(x, y)$, given by (8) and supplemented by (9), is the general solution of a (free of L) first order linear partial differential equation for $F(x, y)$ (equation (12) and in polar coordinates equation (20)), with coefficients depending only on the function $f(x, y)$ giving the orbits (1). This equation then is of the same meaning as the second order equation (5) of the inverse problem, with the understanding that the radial component $F(x, y)$ of the central force now replaces the potential $V(x, y)$ (which may not even exist).

(ii) The significance of equation (12), as it will be explained, lies in that it can be used for the inverse problem of Dynamics of central motions as well as for the direct problem, i.e. to search for the totality of families of orbits which can be generated by a central force field $F(x, y)$. In this case equation (12) rearranged becomes (14) that is a second order nonlinear partial differential equation of the Monge-Ampère type.

(iii) As an application of the new equation we shall find a *necessary and sufficient condition* (23) which a preassigned family (19) has to satisfy in order that this family can result from a *conservative* central force field. It will become clear that such a family is generated by *one* central force field $F(r)$ determined from (24), factored by an arbitrary constant, and that motion of P on it takes place with a specific angular momentum $L(f)$ and also a specific energy dependence on the given family.

Finally we consider two-parametric families of curves and we find conditions in order that the families can be generated by a certain central force field.

2 - A partial differential equation for a central force field

Starting from equation (8), we can obtain a free of angular momentum, linear, first order, partial differential equation for the radial component $F = F(x, y)$ of the central forces (not necessarily conservative) generating the given family of orbits (1), with coefficients depending merely on the orbits. This is effectuated as follows:

In view of (4) we show directly that

$$f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy} = -\Gamma f_x^3.$$

Thus, we write equation (8) as

$$(10) \quad F(x, y) = L^2 r \frac{\Gamma}{(x + y\gamma)^3}.$$

Because of (9), we can write

$$(11) \quad (L^2)_y = \gamma(L^2)_x.$$

Solving (10) for L^2 and replacing in (11), we obtain after some straightforward algebra our first result

$$(12) \quad \gamma F_x - F_y + \Theta F = 0,$$

where

$$(13) \quad \Theta = \frac{\gamma(x\lambda + y\mu)}{x + y\gamma} + \frac{y - x\gamma}{x^2 + y^2}.$$

For any given family (1), the functions γ, λ, μ appearing in (13) are known. In view of the manner used to obtain the differential equation (12), its general solution is given by (10), where L is an arbitrary function of $f(x, y)$. Of course, this fact can also be verified directly.

Apart from being linear, equation (12) is also homogeneous. Thus, if (f, F) is a compatible pair for (12), so is the pair $(f, F_0 F)$ with $F_0 =$ positive constant. This latter constant must be positive because with $F(x, y)$ given by (10), we must have $\frac{X+\gamma Y}{\Gamma} = F_0 \frac{L^2}{(x+y\gamma)^2} \geq 0$, (BOZIS [4]), where $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ are the cartesian components of the force field $F(x, y)$.

Although equation (12) is of the first order and it is applicable generally for nonconservative central forces, its meaning is similar to that of the second order equation (5). Indeed:

- (i) *Both equations relate orbits to what produces these orbits, i.e. central force fields in (12), potentials in (5).*
- (ii) *They were both derived on the grounds of a known integral of motion, i.e. angular momentum for (12), energy for (5).*

We must observe, of course, that equation (12), as it stands, serves for inverse-problem considerations, i.e. given the orbits (1) to find the central force $F(x, y)$. In this sense equation (12) seems, at first sight, of limited significance because we already know the general solution of (12): it is given by (10) with L an arbitrary function of *the given family* $f(x, y)$.

But this is not so. Because equation (12) can be regarded also from the direct problem viewpoint, if it is rearranged so as to have unknown the function $\gamma(x, y)$ i.e. the orbits (1), and known the central force field $F(x, y)$. Indeed, in view of relations (13) and (6), equation (12) is written as follows:

$$(14) \quad \gamma^2 \gamma_{xx} - 2\gamma \gamma_{xy} + \gamma_{yy} = H(x, y, \gamma, \gamma_x, \gamma_y, F, F_x, F_y)$$

where

$$H = (\gamma \gamma_x - \gamma_y) \left[\frac{\gamma F_x - F_y}{F} + \frac{3y(\gamma \gamma_x - \gamma_y)}{x + \gamma y} + \frac{y - \gamma x}{x^2 + y^2} - \gamma_x \right].$$

Equation (14) is our second result and answers the following direct problem: *find all orbits created by a given central force field $F(x, y)$*

(equation (10) cannot answer because the angular momentum L , present in (10), depends on the unknown families of orbits). This task of course is far from being trivial. It amounts to solving a second order nonlinear partial differential equation in $\gamma = \gamma(x, y)$ of the Monge-Ampère type [8].

In fact any solution $\gamma = \gamma(x, y)$ of equation (14) is a possible answer and, in view of the first of (4), it leads to one monparametric family of orbits (1). After finding (1) we can use the relation (10) in order to calculate the corresponding angular momentum $L = L(f)$.

The above situation, in a different but similar context, reminds us of the dispute between SAKELLARIOU [12] and HATZIDAKIS [9], about central forces of the type $F = F(r, v)$ depending both on the radius r and velocity v , to which LEVI-CIVITA [10] also intervened to offer his opinion.

As an example consider the nonconservative force field

$$(15) \quad F = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Then equation (14) reads

$$(16) \quad \begin{aligned} & \gamma^2 \gamma_{xx} - 2\gamma \gamma_{xy} + \gamma_{yy} = \\ & = (\gamma \gamma_x - \gamma_y) \left[\frac{1 + 2x^2 - 6y^2}{x^2 + y^2} (y - \gamma x) + 3y \frac{\gamma \gamma_x - \gamma_y}{x + \gamma y} - \gamma_x \right]. \end{aligned}$$

One solution of this equation is

$$(17) \quad \gamma = \frac{y(3x^2 + y^2)}{r^3 - x(x^2 + 3y^2)},$$

leading to the monparametric family

$$(18) \quad f(x, y) = x - \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c.$$

Replacing (15) and (17) into (10) we obtain the angular momentum dependence from orbit to orbit

$$L^2 = \frac{1}{3}c.$$

The example was taken, for specific selection of certain constants, from APPELL [1].

If the family of orbits

$$(19) \quad f(r, \theta) = c$$

is given in polar coordinates r, θ , equation (12) for the central force $F = F(r, \theta)$ becomes

$$(20) \quad c_1 F_r + c_2 F_\theta + c_0 F = 0,$$

with

$$c_1 = -r f_r f_\theta [f_r (r^2 f_r^2 + 2 f_\theta^2) + r (f_\theta^2 f_{rr} - 2 f_r f_\theta f_{r\theta} + f_r^2 f_{\theta\theta})],$$

$$c_2 = -c_1 \frac{f_r}{f_\theta},$$

and

$$c_0 = r^2 f_r [f_\theta^3 f_{rrr} - 3 f_r f_\theta (f_\theta f_{rr\theta} - f_r f_{r\theta\theta}) - f_r^3 f_{\theta\theta\theta}] -$$

$$- 8 f_r f_\theta [f_r (r^2 f_r^2 + 2 f_\theta^2) + r (f_\theta^2 f_{rr} - 2 f_r f_\theta f_{r\theta} + f_r^2 f_{\theta\theta})] -$$

$$- 3 r^2 [f_\theta^3 f_{rr}^2 + 2 f_r^2 f_\theta f_{r\theta}^2 - 3 f_r f_\theta^2 f_{rr} f_{r\theta} + f_r^2 f_\theta f_{rr} f_{\theta\theta} - f_r^3 f_{r\theta} f_{\theta\theta}] +$$

$$+ f_r^2 f_\theta (5 r^2 f_r^2 + 6 f_\theta^2).$$

The general solution of equation (20), as can be verified directly also, is the expression (10) in polar coordinates

$$(21) \quad F(r, \theta) = \frac{c_1}{r^6 f_r^4 f_\theta} L^2(f(r, \theta)),$$

where L is an arbitrary function of $f(r, \theta)$ standing for the angular momentum which is variable, in general, from orbit to orbit.

The monoparametric family (18) and the force field (15) may be written in polar coordinates as

$$f(r, \theta) = r(\cos \theta - \cos 2\theta) = c, \quad F(r, \theta) = -\frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

and they satisfy, as expected, equation (20). The value of L^2 is found from (21) and it is of course $L^2 = \frac{1}{3}c$.

COMMENT. Although (10) is the general solution of equation (12), for direct problem considerations equation (12) is indispensable. Indeed, (12) is the natural tool to answer questions of the following type: to find

conditions on the families (1) so that these families can be created by central forces given in advance or for which (forces) some sort of additional information is given in advance.

Let us try, for instance, to find all families (1) which can be generated by constant central forces $F(x, y) = F_0$. (Let us have in mind the same constant F_0 for all members of the family). It is immediately seen from (12) that Θ must vanish, so $\Theta = 0$ is the required condition for the orbits. (Such is, e.g., the case with the family of concentric circles $x^2 + y^2 = c$ for which $\gamma = \frac{y}{x}$, $\lambda = \frac{3}{x}$, $\mu = -\frac{3}{y}$, $\Theta = 0$. For this case we find $L^2 = -F_0 (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ from (10).

As another example, we consider as additional information about the central force $F(x, y)$, its divergence is zero (as e.g. in the case of the planar force due to the presence of a finite planar material concentration, outside the matter). In this case the problem is to find if there exist orbits for which both equations (12) and $\text{div } \vec{F} = 0$, i.e. $xF_x + yF_y + F = 0$ can be compatible. Notice that this latter equation cannot be written in view of (10) because of the presence of $L = L(f)$ in it.

REMARK. The well known Binet's formula for a unit mass

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2}{L^2} F(r, \theta)$$

is unquestionably used to offer the radial component of the central force $F(r, \theta)$ creating *one* specific orbit $r = r(\theta)$ traced with a certain value of L . To cover the case of a preassigned *family* (19), formula (21) is suitable.

3 – Conservative central forces

Whittaker's definition for the central force, that we have assumed in this paper, is also adopted e.g. by APPELL [1] and LEVI-CIVITA [10]. In many textbooks, however, e.g. SYMON [13] only *conservative forces* directed to a fixed center are considered as central. In this later case, of course, the radial component of the force is of the form $F = F(r)$. Thus, equation (20) becomes

$$(22) \quad \frac{F'(r)}{F(r)} = -\frac{c_0}{c_1},$$

and it can be valid only for families of orbits (19) for which is verified the condition

$$(23) \quad \left(\frac{c_0}{c_1} \right)_\theta = 0.$$

But true is also the opposite: i.e. if the condition (23) is satisfied, then equation (20) *always has one solution* $F = F(r)$. In fact, for a given family (19) for which (23) is good, we have $\frac{c_0}{c_1}$ depending only of the variable r , therefore we can write always a relation as (22), or equivalently $c_1 F_r + c_0 F = 0$, and the equation (20) admit the solution $F = F(r)$.

In conclusion we have our third result: *a preassigned family of orbits (19) can be generated by a conservative central force field $F = F(r)$ if and only if the condition (23) is satisfied.*

In this case, the force field is found from equation (22), in terms of the given orbits only, by the formula

$$(24) \quad F(r) = F_0 \exp \left[- \int \frac{c_0}{c_1} dr \right],$$

up to a multiplicative constant F_0 .

The angular momentum, found in view of (21), is given by

$$L^2 = \frac{r^6 f_r^4 f_\theta}{c_1} F(r).$$

Finally we can calculate the total energy E of the particle using the equation analogue to (3), in terms of polar coordinates [15], that is

$$f_r V_r + \frac{1}{r^2} f_\theta V_\theta = \frac{2(E - V)}{f_\theta^2 + r^2 f_r^2} \left(f_{rr} f_\theta^2 - 2 f_r f_\theta f_{r\theta} + f_{\theta\theta} f_r^2 + r f_r^3 + \frac{2}{r} f_r f_\theta^2 \right),$$

and taking into account that $V(r) = - \int F(r) dr$ we obtain the energy

$$E = \beta F(r) - \int F(r) dr,$$

where

$$\beta = \frac{r^2 f_r^2 f_\theta}{2 c_1} (r^2 f_r^2 + f_\theta^2).$$

Thus, in this case, both L and E are expressed on the grounds of the given function $f(r, \theta)$.

A common case in Celestial Mechanics is that of a family of *geometrically similar orbits*, that is orbits of the type

$$(25) \quad f(r, \theta) = rg(\theta) = c$$

generated by conservative central forces $F = F(r)$; in this case the condition (23) becomes, after some straightforward algebra

$$(26) \quad \frac{g(g''' + g')}{g'(g'' + g)} = k_0 = \text{const},$$

where the primes denote differentiation with respect the variable θ and where $k_0 \neq 0$, $g'' + g \neq 0$, because $g'' + g = 0$ leads to family of straight lines.

From the previous equation, introducing three constants c_1, c_2, c_3 , we get subsequently:

$$\begin{aligned} \frac{g'' + g}{g^{k_0}} &= c_1 \\ g'^2 &= \frac{2c_1}{k_0 + 1} g^{k_0+1} - g^2 + c_2 \end{aligned}$$

and integrating we found

$$(27) \quad \theta + c_3 = \int \frac{dg}{\left(\frac{2c_1}{k_0 + 1} g^{k_0+1} - g^2 + c_2 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

REMARKS.

1. For $k_0 = 0, 1, 2, -3$, the integral (27) can be done, and also for $k_0 = 3$ and $c_1 c_2 = \frac{1}{2}$, the integral (27) can be found.

2. In the case at hand the family (25) is created of a homogeneous potential $V = r^m G(\theta)$. Such is, for instance, the case of all conics $r[1 + e_0 \cos(\theta - \theta_0)] = c$ of constant eccentricity e_0 and orientation θ_0 with varying semi-major axis a resulting from Newton's potential $V = -\frac{k}{r}$. Equation (5), write in polar coordinates, with the

above potential, becomes an ordinary second order differential equation in $G(\theta)$ (equation (9.8) of BOZIS [6]). The result (26) is in agreement with equation (9.8) of BOZIS [6], if we put $G(\theta) = \text{const.}$, i.e. if we assume further that the central potential $V(r)$ is also homogeneous in x, y which is not generally the case, of course. Actually from (26) and equation (9.8), above mentioned, we find $k_0 = -(m+1)$, where m is the degree of homogeneity of V .

3. Equation (27) gives the totality of families of *geometrically similar orbits* created in the central field given by

$$\frac{F'(r)}{F(r)} = -\frac{c_0}{c_1}.$$

Condition (23) is valid e.g. for the monoparametric family of the spirals

$$r\theta = c,$$

leading to

$$F = -\frac{1}{r^3}, \quad L^2 = 1, \quad E = -\frac{1}{2c^2}.$$

The same condition (23) is not valid for the spirals

$$r\theta^2 = c,$$

i.e. there is no conservative central force creating this family.

REMARK. One might reach the same condition (23) as follows: write equation (5) in polar coordinates, apply it for a potential $V = V(r)$, supposedly depending only on $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, and express the ratio $\frac{V''(r)}{V'(r)}$ in terms of the orbital elements.

4 – Two-parametric families

Let a family of curves

$$(28) \quad f(r, \theta, b) = c$$

parametrized by b and c given in advance. Apparently, formula (21) is not applicable because the resulting force must be independent of the

two parameters and in particular of the parameter b which is, generally, expected to survive as it appears in the function $f(r, \theta, b)$ and also in the term $L^2(f(r, \theta, b))$. Only families (28) satisfying certain conditions may be generated by a certain central force field $F = F(r, \theta)$. To find these conditions we proceed as follows:

We differentiate equation (20) with respect to b and we write the system

$$(29) \quad c_1 F_r + c_2 F_\theta = -c_0 F,$$

$$(30) \quad c_{1,b} F_r + c_{2,b} F_\theta = -c_{0,b} F.$$

Denoting by

$$(31) \quad \epsilon = \frac{f_r}{f_\theta},$$

taking into account that $c_2 = -\epsilon c_1$ and solving the system (29), (30) for $\frac{F_r}{F}$, $\frac{F_\theta}{F}$, we find

$$(32) \quad \frac{F_r}{F} = \frac{\delta_1}{\delta_0}, \quad \frac{F_\theta}{F} = \frac{\delta_2}{\delta_0},$$

where

$$(33) \quad \begin{aligned} \delta_0 &= -c_1^2 \epsilon_b \neq 0, & \delta_1 &= c_0(\epsilon_b c_1 + \epsilon c_{1,b}) - \epsilon c_1 c_{0,b}, \\ \delta_2 &= -c_1 c_{0,b} + c_0 c_{1,b}. \end{aligned}$$

For the system (29), (30) to be compatible, the following conditions must be satisfied:

$$(34) \quad \text{(i): } \left(\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)_b = 0, \quad \text{(ii): } \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)_b = 0, \quad \text{(iii): } \left(\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)_\theta = \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)_r.$$

Then the force $F(r, \theta)$ is determined from (32) up to a multiplicative constant.

Thus, e.g. for the two-parametric family

$$f(r, \theta, b) = \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{r} - b \cos 2\theta \right) = c$$

we obtain, from (33), $\delta_0 = -\frac{9b^2 \cos^2 2\theta (3 \sin \theta + \sin 3\theta)}{2r^{10} \cos^{11} \theta} \neq 0$ and $\frac{\delta_1}{\delta_0} = -\frac{2}{r}$, $\frac{\delta_2}{\delta_0} = -2 \tan 2\theta$ which satisfy the conditions (34).

We obtain the nonconservative central force $F(r, \theta) = \frac{\cos 2\theta}{r^2}$ from (32), and we find $L^2 = \frac{1}{3b}$ from (21).

REMARKS.

1. In view of equations (33) it can be shown by straightforward algebra that if the condition (34) (ii) is valid, then so is the first condition (34) (i) and vice versa. In conclusion: *if and only if, for a given two-parametric family of orbits, the last two conditions are satisfied, then all members of the family result from a central force field determined from the system (32).*

2. If $\delta_2 = 0$, then $F_\theta = 0$ and the force is conservative. Besides, from (34) (iii) we understand that $\frac{\delta_1}{\delta_0}$ depends merely on r and we obtain formula (24), from the first of (32), because $\frac{\delta_1}{\delta_0} = -\frac{c_0}{c_1}$.

This is e.g. the case with the two-parametric family (APPELL [1])

$$\frac{1}{r^2} - b \cos 2\theta = c$$

which leads to $F = -r$ and in the sequel to $L^2 = \frac{1}{c^2 - b^2}$, $E = \frac{c}{c^2 - b^2}$.

3. The parameter b appearing in (28) is neither additive nor multiplicative for the function f , because then (28) would be essentially monoparametric. So, in view of (31), it is $\epsilon_b \neq 0$. Then the case $\delta_0 = 0$ leads to $c_1 = 0$ and also to $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Then formulae (32) become meaningless. Such is e.g. the case of the two parametric family

$$\frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{r} - b \sin \theta + \cos 2\theta \right) = c.$$

REFERENCES

- [1] P. APPELL: *Traité de Mécanique Rationnelle*, Tome I, (1926), 384-431.
- [2] G. BOZIS: *Inverse Problem with Two-parametric Families of Planar Orbits*, *Celest. Mech.*, **31** (1983), 129-142.
- [3] G. BOZIS: *Szebehely's Inverse Problem for Finite Symmetrical Material Concentrations*, *Astron. Astrophys.*, **134** (1984), 360-364.

- [4] G. BOZIS: *Family Boundary Curves for Autonomous Dynamical Systems*, *Celest. Mech. and Dyn. Astr.*, **60** (1994), 161-172.
- [5] G. BOZIS – C. BLAGA: *An Inverse Problem for Isolated Orbits*, *Romanian Astron. J.*, **5**, No 2 (1995), 135-144.
- [6] G. BOZIS: *The Inverse Problem of Dynamics: Basic Facts*, Special issue of *Inverse Problems Journ.*, **11** (1995), 687-708.
- [7] R. BROUCKE – H. LASS: *On Szebehely Equation for the Potential of a Prescribed Family of Orbits*, *Celest. Mech.*, **16** (1977), 215-225.
- [8] R. COURANT – D. HILBERT: *Methods of Mathematical Physics*, vol.II, p. 495, (new edition), John Wiley and Sons, 1989.
- [9] N. HATZIDAKIS: *Quelques observations sur le travail de M. Sakellariou: "Sur une classe des mouvements centraux"*, *Rend. Acc. Lincei*, serie 6, vol.XIII, 1931, 744.
- [10] T. LEVI-CIVITA: *A proposito delle note di Hatzidakis e Sakellariou sui moti centrali*, *Rend. Acc. Lincei*, serie 6, vol. XIII (1931), 715-718.
- [11] F. PUEL: *Formulation intrinseque de l'equation de Szebehely*, *Celest. Mech.*, **32** (1984), 209-216.
- [12] N. SAKELLARIOU: *Sur une classe des mouvements centrales*, *Rend. Acc. Lincei*, serie 6, vol. XII (1930), 514-518.
- [13] K. R. SYMON: *Mechanics*, p. 120, 2nd Ed. Addison-Wesley, 1970.
- [14] V. SZEBEHELY: *On the Determination of the Potential by Sattelite Observations*, *Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari*, **XLIV** (1974) Suppl., 31-35.
- [15] V. SZEBEHELY – J. LUNDBERG – W. J. MC GAHEE: *Potential in the Central Bar Stucture*, *Astrophys. Journ.*, **239** (1980), 880-881.
- [16] E. T. WHITTAKER: *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, section 47, p. 79, (New York - Dover), 1944.

*Lavoro pervenuto alla redazione il 7 aprile 1999
ed accettato per la pubblicazione il 14 luglio 1999.
Bozze licenziate il 22 settembre 1999*

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

Francesco Borghero – Antonio Melis – Dipartimento di Matematica – Università di Cagliari
via Ospedale, 72 – 09124 Cagliari – Italy – e-mail: borghero@vaxcal.unica.it

George Bozis – Department of Theoretical Mechanics – University of Thessaloniki – Thessa-
loniki GR-540 06 Greece – e-mail: gbozis@ccf.auth.gr

This work is partially supported by Gruppo nazionale di Fisica Matematica (GNFM)
of the Italian National Research Council (CNR) and Murst (Italy).

Corso di Fisica Matematica

ELEMENTI DI MECCANICA DEI FLUIDI
AERODINAMICA

Anno accademico 1991-1992

CINEMATICA DEI FLUIDI.

§1.

In questo corso intendiamo trattare di mezzi continui, in particolare fluidi, ossia di sistemi materiali caratterizzati dal fatto di non avere né forma né volume proprio. I fluidi si distinguono in fluidi liquidi e fluidi gassosi: i primi hanno sensibilmente volume proprio ed assumono la forma del recipiente che li contiene; i secondi non posseggono né volume né forma propria.

Lo studio cinematico del moto si può fare ponendosi da due differenti punti di vista: quello *lagrangiano* e quello *euleriano*. Studiare il moto di un fluido dal *punto di vista lagrangiano* equivale a studiare il moto delle singole particelle fluide, le cui traiettorie costituiscono le cosiddette *linee di corrente* nel fluido. Il moto è perciò assegnato dando le traiettorie delle singole particelle e le leggi orarie con cui esse vengono percorse, ossia assegnando per ogni particella le coordinate *attuali* (cioè all'istante t generico) nel seguente modo:

$$(1) \quad x^i = x^i(t; x_0^1, x_0^2, x_0^3) \quad (i=1,2,3)$$

essendo x_0^i (con $i=1,2,3$) le coordinate della posizione occupata dalla particella all'istante $t=0$. Le (1) si possono scrivere in modo conciso in forma vettoriale:

$$(1') \quad P = P(t; P_0).$$

La velocità e l'accelerazione della particella all'istante t saranno:

$$(2) \quad \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}(t; P_0);$$

$$(3) \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}(t; P_0).$$

In questo ordine di idee si dirà che x_0^1, x_0^2, x_0^3, t costituiscono le *coordinate lagrangiane* della particella ed ogni grandezza fisica espressa attraverso queste coordinate sarà detta *scritta in forma lagrangiana*.

Se il moto è regolare potrà dirsi che vi è corrispondenza biunivoca fra le posizioni attuali e quelle iniziali delle particelle, il che significa che le (1), intese come equazioni di trasformazione di coordinate da $x_0^i \Rightarrow x^i$, sono invertibili, il che richiede che il determinante jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x_0^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x_0^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x_0^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x_0^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x_0^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x_0^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x_0^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x_0^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x_0^3} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

Dalle (1), in tale ipotesi di regolarità del moto, si ricava:

$$(4) \quad x_0^i - x^i(x^1, x^2, x^3, t) \quad (i=1,2,3)$$

o, in forma vettoriale più compatta:

$$P_0 - P_0(P;t).$$

Sostituendo in (2) si ottiene allora:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}[t; P_0(P;t)] = \mathbf{e}(P;t).$$

Rimane così definito il campo vettoriale, variabile col tempo, $\mathbf{e}(P;t)$ che rappresenta lo *stato cinetico* (o *atto di moto*) del fluido, ossia il campo vettoriale delle velocità nel fluido per ciascun istante t . Ponendosi dal punto di vista euleriano si assumono come parametri per esprimere le grandezze fisiche caratteristiche del fluido (densità, velocità, ...) le quantità x^1, x^2, x^3, t che vengono appunto dette *coordinate euleriane*; le grandezze così espresse si dirà che sono poste in *forma euleriana*.

In sostanza, porsi dal punto di vista lagrangiano (o storico) significa studiare il moto del fluido attraverso il moto delle particelle che lo costituiscono; mettersi dal punto di vista euleriano (o statistico) vuol dire studiare la evoluzione ed i caratteri del campo $\mathbf{e}(P;t)$ rappresentativo dello stato cinetico del fluido.

Sia $\varphi(x^1, x^2, x^3, t)$ una grandezza fisica caratteristica del fluido (ad esempio la densità materiale ρ , la velocità $\mathbf{v}$, ...) espressa in forma euleriana. Si possono definire per essa due differenti derivate temporali: *la derivata locale*, che verrà indicata con $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, che viene calcolata tenendo conto della variabilità di φ col tempo in un assegnato luogo individuato dalle coordinate x^1, x^2, x^3 ; *la derivata sostanziale*, per la quale si adotterà la notazione $\frac{d\varphi}{dt}$, che viene calcolata valutando la variazione di φ per una ben individuata particella fluida, ossia tenendo conto del fatto che nell'intervallo di tempo dt la grandezza φ non soltanto varia in genere col tempo perchè essa rappresenta un carattere non costante della particella, ma anche perchè questa col tempo cambia posizione. La derivata locale coincide con la derivata parziale rispetto al tempo ed è data da:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x^1, x^2, x^3, t + \Delta t) - \varphi(x^1, x^2, x^3, t)}{\Delta t}.$$

Ovviamente essa si potrà esprimere, utilizzando le formule di trasformazione (1) e (4), sia in forma euleriana che in forma lagrangiana.

La derivata sostanziale è invece:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x^1 + v_1 \Delta t, x^2 + v_2 \Delta t, x^3 + v_3 \Delta t, t + \Delta t) - \varphi(x^1, x^2, x^3, t)}{\Delta t}.$$

Se, per semplicità di ragionamento, supponiamo che φ dipenda solamente da x^1 , oltrechè dal tempo t , ossia $\varphi = \varphi(x^1, t)$, si ha, ricordando la definizione di differenziale totale,:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} v_1 dt + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$$

e quindi:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}.$$

Se, più in generale, è $\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3, t)$, sarà:

$$(5) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \varphi.$$

Ovviamente anche la derivata sostanziale si potrà scrivere sia in forma euleriana che in forma lagrangiana, assegnandola o in funzione delle coordinate x^1, x^2, x^3, t ovvero tramite x_0^1, x_0^2, x_0^3, t .

Osservazione.

Per quanto ora mostrato l'accelerazione di ogni particella fluida deve essere valutata, quando è assegnato il campo $\mathbf{e}(P;t)$ che per il suo significato di stato cinetico verrà d'ora in avanti indicato con $\mathbf{v}(P;t)$, calcolando la derivata sostanziale del vettore $\mathbf{v}(P;t)$. Dette rispettivamente v_k e a_k le componenti k^{me} della velocità e dell'accelerazione, si ha per la (5):

$$(6) \quad a_k = \frac{dv_k}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v_k}{\partial x^i} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } v_k.$$

Per $k=1$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x^2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x^3} = \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x^1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x^3} + v_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial v_3}{\partial x^1} \right) - v_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

Con semplici calcoli diretti è facile rendersi conto che può allora scriversi:

$$a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} \text{grad } v^2 \right)_1 + (\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v})_1$$

e tenendo conto delle analoghe espressioni che si possono ottenere per a_2 ed a_3 si ha:

$$(7) \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + (\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v}.$$

Questa è una espressione particolarmente significativa perchè fornisce direttamente la accelerazione nella sua formulazione euleriana.

E' opportuno ricordare, accanto alla (7), un'altra espressione dell'accelerazione così come essa si deduce dalla (6):

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

dove viene introdotto l'operatore differenziale $\mathbf{v} \cdot \nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x^3}$ come suggerito dalla stessa (6).

§2.

Le linee che, in un assegnato istante, hanno in ogni loro punto per retta tangente la retta d'azione del vettore $\mathbf{v}$ in quel punto, ossia le linee di campo di $\mathbf{v}$ in quell'istante, sono le cosiddette *linee di flusso* ed in genere variano col campo da un istante all'altro. Esse sono, in ogni istante, le ∞^2 linee così definite: se $dP = (dx^1, dx^2, dx^3)$ è tangente in P alla linea di flusso, esso risulta parallelo a $\mathbf{v}$ in quel punto per cui:

$$\mathbf{v} \times dP = 0$$

e quindi:

$$v_2 dx^3 - v_3 dx^2 = 0; v_3 dx^1 - v_1 dx^3 = 0; v_1 dx^2 - v_2 dx^1 = 0$$

da cui:

$$\frac{dx^1}{v_1} = \frac{dx^2}{v_2} = \frac{dx^3}{v_3}.$$

Pertanto le equazioni differenziali che rappresentano le linee di flusso sono, ad esempio nelle regioni dove è $v_1 \neq 0$:

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{v_2}{v_1} = f(x^1, x^2, x^3, t)$$

$$\frac{dx^3}{dx^1} = \frac{v_3}{v_1} = g(x^1, x^2, x^3, t).$$

Si tratta di un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine, nei secondi membri delle quali figura il parametro t , che mediante integrazione consentono di ricavare le equazioni in termini finiti delle ∞^2 linee di flusso nella seguente forma:

$$x^2 = x^2(x^1; t; C_1, C_2)$$

$$x^3 = x^3(x^1; t; C_1, C_2)$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie di integrazione. Esse in genere *non* coincidono con le ∞^3 linee di corrente, che sono appunto tante quante sono le ∞^3 particelle che costituiscono la massa fluida.

Tuttavia, se il moto è *stazionario*, se cioè nelle espressioni delle grandezze che caratterizzano il moto del fluido date in coordinate euleriane non compare esplicitamente il tempo, è facile convincersi che le linee di corrente diventano pur esse una duplice infinità e vengono a coincidere con le linee di campo, ora non più variabili col tempo. Infatti una particella che in un dato istante t si trova in P su di una linea di flusso γ , nell'istante $t+dt$ occuperà la posizione $P+dP = P+vdt$ che appartiene ancora alla linea γ che è rimasta invariata. Si conclude che γ è anche traiettoria, linea di corrente, per le ∞^1 particelle che la costituiscono.

§3.

Atto di moto regolare di un fluido. Supponiamo che il campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P, t)$ sia *regolare*, ossia che il vettore $\mathbf{v}(P, t)$ sia finito e continuo, insieme con i suoi derivati, nella regione occupata dal fluido, nel senso che in due qualunque punti P e P' infinitamente vicini le determinazioni del vettore $\mathbf{v}$ differiscono per quantità infinitesime dello stesso ordine di $(P'-P)$. Se $\mathbf{v}$ è la velocità del fluido in $P = (x^1, x^2, x^3)$ e $\mathbf{v}'$ la velocità in $P' = (x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3)$ appartenente all'intorno infinitesimo di P , per la regolarità del moto si ha:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} dx^i$$

che, adottando il simbolo $\mathbf{v}_{/i}$ per indicare $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i}$, si può scrivere come segue:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_{/i} dx^i.$$

In componenti:

$$(8) \quad \begin{aligned} v'_k &= v_k + \sum_{i=1}^3 v_{k/i} dx^i = \\ &= v_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (v_{k/i} - v_{i/k}) dx^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (v_{k/i} + v_{i/k}) dx^i \quad (k=1,2,3). \end{aligned}$$

Pertanto il vettore $\mathbf{v}'$ risulta decomposto nella somma di tre vettori:

$$(9) \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$$

con

$$\xi_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (v_{k/i} - v_{i/k}) dx^i \quad (k=1,2,3)$$

$$\eta_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (v_{k/i} + v_{i/k}) dx^i. \quad (k=1,2,3)$$

Detto $\mathbf{r}$ il vettore rot $\mathbf{v}$ di componenti:

$$r_1 = v_{3/2} - v_{2/3}$$

$$r_2 = v_{1/3} - v_{3/1}$$

$$r_3 = v_{2/1} - v_{1/2}$$

è facile convincersi che:

$$(10) \quad \xi = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times (\mathbf{P}' - \mathbf{P}).$$

Se poi si introduce la matrice simmetrica ζ di elementi

$$(11) \quad \zeta_{ik} = \frac{1}{2} (v_{k/i} + v_{i/k})$$

ovviamente si ha:

$$\eta_k = \sum_{i=1}^3 \zeta_{ki} dx^i.$$

Ciò consente di scrivere il vettore η nel modo seguente:

$$(12) \quad \eta = \zeta (\mathbf{P}' - \mathbf{P})$$

dove al secondo membro figura il prodotto fra la matrice ζ ed il vettore $(\mathbf{P}' - \mathbf{P})$ concepito come matrice ad una sola colonna di elementi dx^1, dx^2, dx^3 . Pertanto ζ è l'operatore lineare che trasforma il vettore $(\mathbf{P}' - \mathbf{P})$ di componenti dx^1, dx^2, dx^3 nel vettore η di componenti $\eta_k = \sum_{i=1}^3 \zeta_{ki} dx^i$ ($k=1,2,3$). Sostituendo in (9) la (10) e la (12) si ha così:

$$(13) \quad \mathbf{v}(\mathbf{P}') = \mathbf{v}' = \mathbf{v}(\mathbf{P}) + \frac{1}{2} \mathbf{r} \times (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) + \zeta (\mathbf{P}' - \mathbf{P}).$$

Ora, $\mathbf{v}(\mathbf{P}) + \frac{1}{2} \mathbf{r} \times (\mathbf{P}' - \mathbf{P})$ definisce, nell'intorno infinitesimo di P , un atto di moto rototraslatorio con velocità angolare $\omega = \frac{1}{2} \mathbf{r}$. L'atto di moto regolare, nell'intorno infinitesimo di P risulta dalla composizione di un atto di moto rototraslatorio e di un atto di moto in cui la velocità è $\zeta (\mathbf{P}' - \mathbf{P})$. Il primo atto di moto non comporta deformazione. Responsabile della deformazione è perciò il secondo atto di moto, caratterizzato dalla matrice ζ di elementi dati dalla (11), che definisce la cosiddetta *velocità di deformazione*.

Per chiarire il significato di η consideriamo un atto di moto in cui sia presente soltanto il termine $\zeta (\mathbf{P}' - \mathbf{P})$, ossia un atto di moto in cui si prescinda

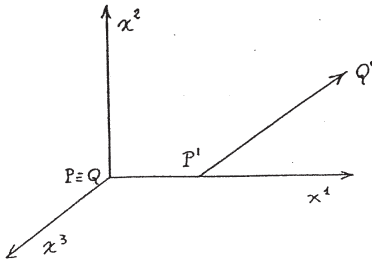
da quello rigido. Considerati tre assi cartesiani ortogonali x^1, x^2, x^3 uscenti da P, rispetto ai quali pertanto P è fisso, lo spostamento infinitesimo del punto P' dell'intorno di P che avviene nell'intervallo di tempo dt sarà rappresentato da:

$$(14) \quad (Q'-P') = dP' = \zeta (P'-P)dt$$

se con Q' abbiamo indicato la posizione all'istante t+dt raggiunta dal punto che nell'istante t si trovava in P'. La corrispondenza fra i punti Q' e P' espressa dalla (14) è lineare nelle componenti di (P'-P) in quanto da (14) si deduce:

$$(15) \quad x_{Q'}^i = x_{P'}^i + \sum_{k=1}^3 \zeta_{ki} x_{P'}^k dt. \quad (i=1, 2, 3)$$

Ciò sta a significare che durante la deformazione le rette si trasformano in rette, i piani in piani e che viene conservato il parallelismo fra le rette e fra i piani.



Per chiarire innanzitutto il significato fisico degli elementi della matrice di deformazione con indici eguali, ad esempio di ζ_{11} , consideriamo il punto P' posto sull'asse x^1 , ossia il punto che nel riferimento adottato, tenendo presente che appartiene all'intorno infinitesimo di P, ha vettore di posizione $(P'-P) = dx^1 i$.

Per la formula (15), che scritta distesamente è:

$$x_{Q'}^i = x_{P'}^i + (\zeta_{1i} x_{P'}^1 + \zeta_{2i} x_{P'}^2 + \zeta_{3i} x_{P'}^3) dt, \quad (i=1, 2, 3)$$

ricordando che le coordinate di P' sono $dx^1, 0, 0$, si ha:

$$\begin{aligned} x_{Q'}^1 &= dx^1 + (\zeta_{11} dx^1 + \zeta_{21} \cdot 0 + \zeta_{31} \cdot 0) dt = dx^1 + \zeta_{11} dx^1 dt \\ x_{Q'}^2 &= \zeta_{12} dx^1 dt \\ x_{Q'}^3 &= \zeta_{13} dx^1 dt \end{aligned}$$

Osservato che in questa deformazione il punto P rimane fisso per cui la sua posizione finale Q coincide con P, si ricava che il segmento PP', disposto secondo l'asse x^1 e di lunghezza dx^1 , in virtù della deformazione si dispone secondo il vettore (Q'-Q) la cui lunghezza è:

$$|Q'-Q| = \sqrt{(1 + \zeta_{11}dt)^2 + \zeta_{12}^2 dt^2 + \zeta_{13}^2 dt^2} dx^1.$$

Trascurando sotto il segno di radice i termini infinitesimi di ordine superiore al primo in dt, può scriversi:

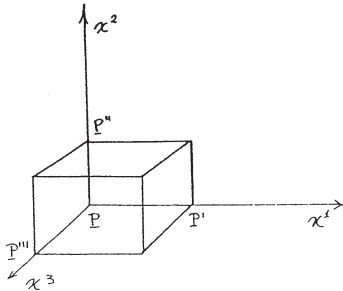
$$Q'Q \approx \sqrt{1 + 2\zeta_{11}dt} dx^1 \approx (1 + \zeta_{11}dt)dx^1.$$

L'allungamento specifico in direzione dell'asse x^1 è quindi:

$$\frac{Q'Q-PP}{PP} = \frac{(1 + \zeta_{11}dt)dx^1 - dx^1}{dx^1} = \zeta_{11}dt.$$

Ciò vuol dire che ζ_{11} rappresenta la *velocità di allungamento* secondo la direzione dell'asse x^1 .

Significato analogo si trova per ζ_{22} e ζ_{33} .



Si consideri ora il parallelepipedo di spigoli PP', PP'' e PP''' disposti secondo gli assi x^1, x^2, x^3 e di lunghezza dx^1, dx^2 e dx^3 . Per via della deformazione i tre vettori (P'-P), (P''-P) e (P'''-P) si dispongono come i tre vettori (Q'-Q), (Q''-Q) e (Q'''-Q):

$$(Q'-Q) = (1 + \zeta_{11}dt)dx^1 \mathbf{i} + \zeta_{21}dx^1dt \mathbf{j} + \zeta_{31}dx^1dt \mathbf{k}$$

$$(Q''-Q) = \zeta_{12}dx^2dt \mathbf{i} + (1 + \zeta_{22}dt)dx^2 \mathbf{j} + \zeta_{32}dx^2dt \mathbf{k}$$

$$(Q'''-Q) = \zeta_{13}dx^3dt \mathbf{i} + \zeta_{23}dx^3dt \mathbf{j} + (1 + \zeta_{33}dt)dx^3 \mathbf{k}$$

i quali sono ancora spigoli di un parallelepipedo [si ricordi l'osservazione fatta sulla (15)] non più trirettangolo. Il suo volume dV' , trascurando i soliti

termini infinitesimi di ordine superiore e tenendo conto che gli angoli fra gli spigoli differiscono di poco da angoli retti per cui il loro coseno è infinitesimo, è:

$$dV' = [1 + (\zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta_{33}) dt] dx^1 dx^2 dx^3$$

per cui la dilatazione specifica sarà:

$$\frac{dV' - dV}{dV} = (\zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta_{33}) dt.$$

Si ricava così che $\zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta_{33} = v_{1/1} + v_{2/2} + v_{3/3} = \text{div } \mathbf{v}$ rappresenta la *velocità di dilatazione cubica* dell'elemento di volume. In seguito si indicherà tale velocità di dilatazione con la lettera greca χ .

Vogliamo ora dare il significato fisico degli elementi ζ_{ij} della matrice di deformazione con indici diversi. Sia $\cos \theta_{12}$ il coseno dell'angolo formato dai vettori $(Q'-Q)$ e $(Q''-Q)$. E':

$$\begin{aligned} & \frac{(Q'-Q) \cdot (Q''-Q)}{Q'Q \cdot Q''Q} = \\ & = \frac{[(1 + \zeta_{11}dt)\zeta_{12}dt + (1 + \zeta_{22}dt)\zeta_{21}dt + \zeta_{31}\zeta_{32}dt^2]dx^1dx^2}{\sqrt{[(1 + \zeta_{11}dt)^2 + \zeta_{21}^2dt^2 + \zeta_{31}^2dt^2] \cdot [\zeta_{12}^2dt^2 + (1 + \zeta_{22}dt)^2 + \zeta_{32}^2dt^2]}dx^1dx^2} \approx \\ & \approx 2\zeta_{12}dt \end{aligned}$$

Si ricava così:

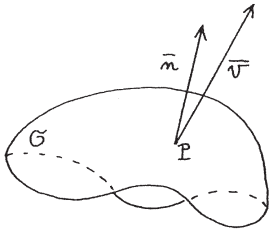
$$\cos \theta_{12} = 2\zeta_{12}dt$$

che è indice dello "scorrimento" del piano x^1x^2 . Pertanto $2\zeta_{12}$ rappresenta la *velocità di scorrimento* secondo la giacitura del piano x^1x^2 . Significati analoghi si ricavano per $2\zeta_{13}$ e $2\zeta_{23}$.

§ 4.

Nello studio dello stato cinetico di un elemento di fluido in moto regolare siamo stati indotti a considerare due grandezze particolarmente importanti:

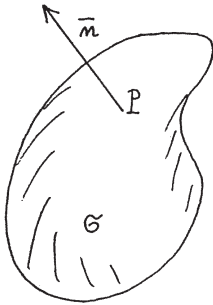
lo scalare $\chi = \text{div } \mathbf{v}$ ed il vettore $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$. Il primo rappresenta la velocità di dilatazione cubica dell'elemento, il secondo la velocità angolare istantanea dell'elemento stesso. All'operatore divergenza si lega la nozione di flusso del vettore $\mathbf{v}$, all'operatore rotore quella di circolazione.



Data una superficie σ immersa nel fluido ed indicato con $\mathbf{n}$ il versore della normale ad essa in un suo generico punto P , si definisce *flusso di $\mathbf{v}$ attraverso σ* lo scalare:

$$\Phi_{\sigma} = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\sigma} v_n d\sigma$$

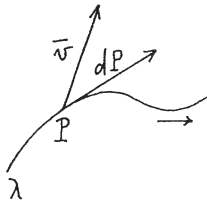
dove v_n è la componente di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{n}$.



Se σ è una superficie chiusa e τ è la regione di spazio da essa delimitata, detta $\mathbf{n}$ la normale in un generico punto P di σ orientata verso l'esterno di τ , se $\mathbf{v}$ è regolare in τ e su σ , vale il teorema della divergenza:

$$\int_{\tau} \text{div } \mathbf{v} d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \Phi_{\sigma}$$

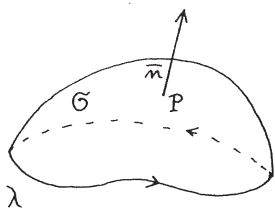
avendo indicato con Φ_{σ} il flusso di $\mathbf{v}$ uscente da σ .



Data una linea λ orientata, si dice *circolazione di $\mathbf{v}$ lungo λ* la quantità scalare:

$$\Gamma_{\lambda} = \int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = \int_{\lambda} v_t d\lambda$$

dove $d\mathbf{P}$ è il vettore *spostamento elementare* lungo λ orientato come λ e v_t è la componente di $\mathbf{v}$ lungo la tangente a λ in P . Si consideri ora immersa nel fluido una linea λ chiusa e sia σ una qualunque superficie che abbia per bordo la linea λ . Nei punti di σ si orienti la normale $\mathbf{n}$ in verso tale che un



osservatore disposto secondo $\mathbf{n}$ veda antiorario il verso prefissato, del tutto arbitrariamente, sulla linea λ . Se $\mathbf{v}$ è regolare su σ e lungo λ vale *il teorema di Stokes*:

$$\Gamma_{\lambda} = \int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = \int_{\sigma} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma :$$

la circolazione di $\mathbf{v}$ lungo la linea chiusa λ eguaglia il flusso del vettore $\mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{v}$ attraverso una qualunque superficie σ che si appoggia su λ .

§ 5.

Atto di moto irrotazionale. Supponiamo che, dato il campo delle velocità $\mathbf{v}$, sia dovunque:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0,$$

ossia che ogni elemento fluido possenga velocità angolare nulla: l'atto di moto è costituito allora dalla composizione di un atto di moto traslatorio con un atto di moto dilatatorio.

E' noto che condizione necessaria e sufficiente affinché un campo regolare $\mathbf{v}(P)$ sia irrotazionale, ossia che si verifichi $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, è che la regione τ occupata dal fluido costituisca un dominio semplicemente connesso e che ivi risulti:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$$

essendo φ una funzione uniforme. La funzione φ così introdotta viene detta *potenziale cinetico* ed ovviamente è:

$$v_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

o, più brevemente:

$$v_k = \varphi /_k .$$

L'essere $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ implica dunque che sia $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ per cui:

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{P} = d\varphi:$$

$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{P}$ è il differenziale totale del potenziale cinetico φ . Ne consegue che la circolazione Γ_λ lungo una linea λ congiungente due punti A e B è:

$$\Gamma_\lambda = \int_\lambda \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Se φ è *funzione uniforme* la circolazione di $\mathbf{v}$ lungo una qualunque linea chiusa è pertanto nulla. *Non così avviene se φ non è uniforme.*

Ricordiamo il teorema di Stokes: se $\mathbf{v}$ è regolare su λ e su σ si ha:

$$\Gamma_\lambda = \int_\lambda \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = \int_\sigma \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Se ovunque è $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, Γ_λ è nulla lungo qualunque linea chiusa totalmente immersa nel campo. Ciò vuol dire che se $\mathbf{v}$ è regolare e $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, φ è funzione uniforme. Viceversa, se φ è uniforme, Γ_λ è nulla lungo qualunque linea chiusa e se $\mathbf{v}$ è regolare, è $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ dappertutto. Pertanto se φ non è una funzione uniforme, $\mathbf{v}$ non può avere tutti i caratteri di regolarità presupposti.

L'atto di moto irrotazionale è individuato assegnando, in ogni punto P del campo del moto, la funzione potenziale cinetico φ . Viceversa, assegnato $\mathbf{v}$ in un atto di moto irrotazionale, il potenziale cinetico $\varphi(P)$ sarà dato da:

$$\varphi(P) = \varphi(P_0) + \int_\lambda \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P}$$

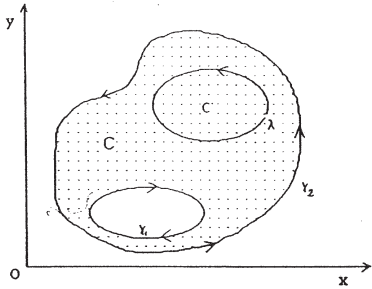
essendo λ una qualunque linea congiungente un prefissato punto P_0 con il punto P corrente nel campo del moto. Per la arbitrarietà di P_0 , il potenziale cinetico viene così assegnato a meno della costante arbitraria $\varphi(P_0)$.

Moto irrotazionale piano.

Consideriamo ora un moto irrotazionale piano, ossia un moto in cui tutte le particelle si muovono con velocità parallela, ad esempio, al piano $x^1 x^2$ ed in cui tutte le grandezze risultano indipendenti dalla terza coordinata x^3 . Indicate ora con x ed y le variabili x^1 ed x^2 sarà:

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} ; \quad v_3 = 0.$$

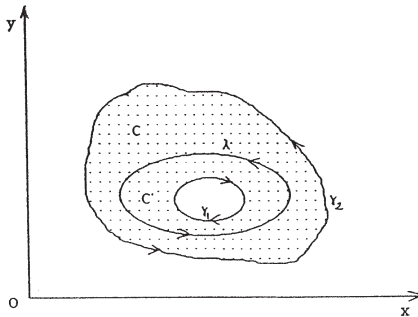
Sarà allora sufficiente studiare le modalità del moto nel piano xy .



Sia $\mathbf{v}(P)$ regolare nella regione piana C , non semplicemente connessa, di contorno completo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Consideriamo una regione C' contenuta in C delimitata dalla linea chiusa λ . Se $\mathbf{k}$ è il versore dell'asse z ortogonale al piano xy , è evidentemente $\text{rot } \mathbf{v} = (v_{2/1} - v_{1/2})\mathbf{k}$ parallelo a $\mathbf{k}$ e, per il teorema di Stokes:

$$\Gamma_\lambda = \int_\lambda \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = \int_\lambda (v_1 dx + v_2 dy) = \int_{C'} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} dx dy.$$

Poichè, per ipotesi, in $P \in C$ è $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, data la regolarità di $\mathbf{v}$, è $\Gamma_\lambda = 0$: è nulla la circolazione lungo una qualunque linea chiusa che delimita una regione C' contenuta in C in cui $\mathbf{v}$ è regolare.

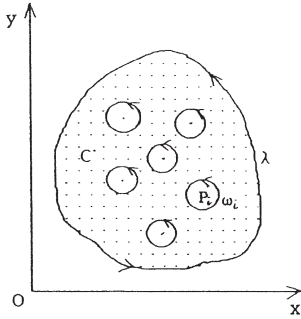


Se invece la regione C' non è tutta costituita da punti di C , ma di essa appartiene a C solo la parte delimitata da λ e dalla porzione γ_1 di γ , applicando ancora il teorema di Stokes e convenendo di stabilire come verso sul contorno di C' quello per cui un osservatore che si muova in tale verso lascia i punti di C alla sua sinistra, si ha:

$$\int_\lambda (v_1 dx + v_2 dy) + \int_{\gamma_1} (v_1 dx + v_2 dy) = 0.$$

Se sia su λ che su γ_1 si circola nel medesimo verso antiorario si ricava invece:

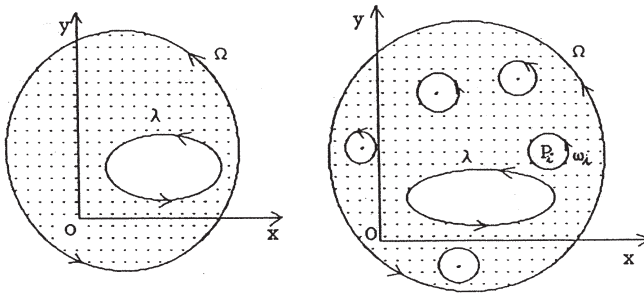
$$\Gamma_\lambda = \Gamma_{\gamma_1}$$



Se poi in C il campo $\mathbf{v}$ è regolare tranne che nei punti $P_1, P_2, \dots, P_N$, isolando tali punti con cerchietti $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ di raggio infinitesimo e centro nei punti di singolarità si ha:

$$\Gamma_\lambda = \sum_{i=1}^N \int_{\omega_i} (v_1 dx + v_2 dy) = \sum_{i=1}^N \Gamma_{\omega_i}$$

Sia ora $\mathbf{v}(P)$ regolare nella regione C esterna alla linea chiusa λ . Isolato il



punto all'infinito con un cerchio Ω di raggio infinitamente grande sarà:

$$\int_{\Omega} (v_1 dx + v_2 dy) - \int_{\lambda} (v_1 dx + v_2 dy) = 0$$

ossia:

$$\Gamma_\lambda = \int_{\Omega} (v_1 dx + v_2 dy)$$

Se poi in C vi sono N punti di singolarità del campo, isolandoli come nel caso già visto, sarà:

$$\int_{\Omega} (v_1 dx + v_2 dy) - \int_{\lambda} (v_1 dx + v_2 dy) - \sum_{i=1}^N \Gamma_{\omega_i} = 0$$

da cui:

$$\Gamma_{\lambda} = \int_{\Omega} (v_1 dx + v_2 dy) - \sum_{i=1}^N \Gamma_{\omega_i}$$

Mostriamo ora come si può determinare un atto di moto irrotazionale quando in ogni punto della regione occupata dal fluido è assegnata la velocità di dilatazione cubica $\chi = \text{div } \mathbf{v}$. Essendo, per la irrotazionalità del moto, $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ si avrà:

$$\text{div grad } \varphi = \chi$$

ci si trova pertanto di fronte al problema di determinare il potenziale cinetico φ soddisfacente questa equazione. Osservato che:

$$\text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi,$$

si tratta di risolvere *l'equazione di Poisson*.

$$\Delta \varphi = \chi$$

dove si è introdotto il simbolo dell'operatore differenziale lineare del secondo ordine (*Laplaciano*):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Ricordiamo che alla equazione di Poisson si perviene, ad esempio, quando si ricerca il potenziale newtoniano Φ del campo gravitazionale generato da una distribuzione materiale continua di densità materiale ρ racchiusa in una regione τ delimitata da una superficie chiusa σ . Ci si trova di fronte all'equazione:

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho$$

il cui integrale generale è dato da:

$$\Phi(P) = \int_{\tau} \frac{\rho(Q)}{R(PQ)} d\tau + \alpha(P),$$

dove P è il punto "potenziato" ed $R(PQ)$ rappresenta la distanza di P dal punto Q corrente entro il dominio τ . $\alpha(P)$ è una arbitraria funzione armonica, una funzione cioè soddisfacente *l'equazione di Laplace*.

$$\Delta\alpha = 0.$$

Nel caso attuale avremo pertanto:

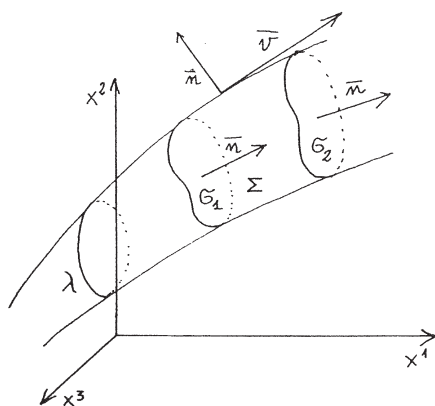
$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\chi(Q)}{R(PQ)} d\tau + \alpha(P).$$

Un procedimento per mostrare che la funzione $\varphi(P)$ così definita è la soluzione dell'equazione di Poisson sarà mostrato nel seguito, dopo che saranno stati fatti alcuni richiami sulla teoria delle funzioni armoniche.

§ 6.

Atto di moto solenoidale. Un atto di moto particolarmente interessante si ha quando $\chi = \text{div } \mathbf{v} = 0$, ossia quando è nulla la velocità di dilatazione cubica: il fluido si comporta in tal caso come se fosse incompressibile. Introduciamo la importante nozione di *tubo di flusso*.

Sia λ una linea chiusa immersa nel campo occupato dal fluido e per ogni suo punto si consideri la linea di flusso del campo stesso. Il tubo che così si viene a costruire è detto tubo di flusso. Vale il teorema:



della divergenza al volume τ della regione racchiusa da $\sigma_1 + \sigma_2 + \Sigma$ si ha:

$$\int_{\sigma_1 + \sigma_2 + \Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\tau} \text{div} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\tau = 0.$$

Osservato che $\int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ è nullo poichè su Σ il vettore $\mathbf{v}$ è ortogonale ad $\mathbf{n}$, ed orientata su σ_1 la normale $\mathbf{n}$ come su σ_2 si ottiene:

$$-\int_{\sigma_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\sigma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0,$$

ossia:

$$\Phi_{\sigma_1} = \Phi_{\sigma_2}.$$

Lo scalare $\Phi = \Phi_{\sigma_1} = \Phi_{\sigma_2}$ è quindi elemento caratteristico del tubo e vien perciò detto *flusso del tubo*.

In virtù della regolarità del campo un tubo di flusso non può arrestarsi nella regione occupata dal fluido: o si estende fino al contorno, o si richiude ad anello.

Dato un campo vettoriale soddisfacente la condizione di solenoidalità:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0,$$

ad esso può associarsi un vettore $\mathbf{w}$, detto *potenziale vettore del campo*, legato a $\mathbf{v}$ dalla relazione:

$$\text{rot} \mathbf{w} = \mathbf{v}$$

equivalente alle tre equazioni differenziali per le tre componenti w_1, w_2, w_3 del vettore $\mathbf{w}$:

$$\frac{\partial w_3}{\partial x^2} - \frac{\partial w_2}{\partial x^3} = v_1$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x^3} - \frac{\partial w_3}{\partial x^1} = v_2$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x^1} - \frac{\partial w_1}{\partial x^2} = v_3$$

Il potenziale vettore risulta definito, in virtù delle equazioni ora scritte, a meno del gradiente di una arbitraria funzione scalare φ , in quanto è identicamente:

$$\text{rot grad } \varphi = 0.$$

Si può allora disporre di questa arbitrarietà per imporre condizioni al potenziale vettore $\mathbf{w}$, ad esempio quella di essere a sua volta solenoidale. Determinato infatti un vettore $\mathbf{w}'$ soddisfacente le equazioni scritte, anche:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \text{grad } \varphi$$

le soddisfa e se si esige che sia $\text{div} \mathbf{w} = 0$ basta scegliere φ soluzione dell'equazione di Poisson:

$$\Delta \varphi = - \text{div } \mathbf{w}'$$

perchè la richiesta condizione sia soddisfatta.

Campo cinetico solenoidale piano.

Se è:

$$v_1 = v_1(x, y), \quad v_2 = v_2(x, y), \quad v_3 = 0,$$

le equazioni differenziali riguardanti il potenziale vettore diventano:

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} = v_1; \quad -\frac{\partial w_3}{\partial x} = v_2; \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x^2} = 0.$$

A queste si può soddisfare con $w_1 = w_2 = 0$, associando così al campo l'unica funzione scalare $w_3 = \psi$ per la quale si ha:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

La nuova funzione così introdotta è detta *funzione di flusso* o *funzione di Stokes* ed riveste, per i campi solenoidali piani, ufficio analogo a quello della funzione potenziale nei riguardi dei campi irrotazionali.

E' facile verificare che le linee del piano date dalle equazioni:

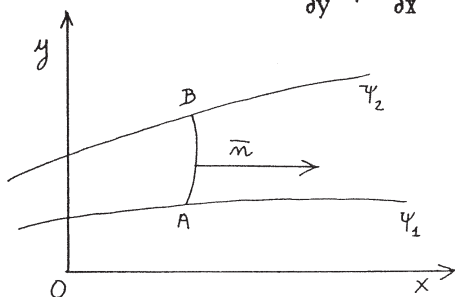
$$\psi(x, y) = \text{cost.}$$

sono le linee di flusso del campo. Infatti, come si è visto, le equazioni differenziali di queste sono:

$$\frac{v_1}{dx} - \frac{v_2}{dy} \quad \text{ossia:} \quad v_1 dy - v_2 dx = 0$$

e quindi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0. \quad \text{C.V.D.}$$



Consideriamo nel piano le due linee di flusso corrispondenti a due assegnati valori ψ_1 e ψ_2 della funzione di Stokes. Esse delimitano un *nastro di flusso* al quale si può associare il flusso Φ attraverso una qualunque linea λ congiungente due punti A e B

presi rispettivamente sulle due linee. Si ha infatti, se $\mathbf{n}$ è il versore della normale a λ :

$$\mathbf{n} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}$$

per cui:

$$\Phi = \int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \psi_2 - \psi_1.$$

Determinazione di un atto di moto solenoidale, essendo assegnato $\text{rot } \mathbf{v}$.

Sia dato, in ogni punto del campo, il vettore $\mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{v}$. Essendo, per ipotesi, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, sarà:

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{w}$$

con $\text{div } \mathbf{w} = 0$.

Poichè vale l'identità vettoriale:

$$\text{rot rot } \mathbf{w} = \text{grad div } \mathbf{w} - \Delta \mathbf{w}$$

si ottiene, per il potenziale vettore, la seguente equazione di Poisson:

$$\Delta \mathbf{w} = -\mathbf{r}.$$

Quindi:

$$\mathbf{w}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{r}(Q)}{R(PQ)} d\tau + \boldsymbol{\alpha}(P)$$

da cui:

$$\mathbf{v}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \text{rot}_P \left(\frac{\mathbf{r}(Q)}{R(PQ)} \right) d\tau + \text{rot } \boldsymbol{\alpha}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$ vettore armonico arbitrario.

§7.

Atto di moto armonico.

Un atto di moto particolarmente significativo per un fluido incomprimibile è quello irrotazionale: lo stato cinetico è puramente traslatorio e le particelle fluide si deformano senza che il loro volume cambi. Essendo:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \end{aligned}$$

poichè quindi:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$$

si ha:

$$\text{div grad } \varphi = 0$$

ossia :

$$\Delta \varphi = 0 :$$

il potenziale cinetico soddisfa l'equazione di Laplace, è cioè una funzione armonica. Pure armonico è il suo gradiente, ossia anche il vettore $\mathbf{v}$ è armonico.

Cenni sulle funzioni armoniche.

Con calcolo diretto è facile mostrare che, detta R la distanza del punto $P(x^1, x^2, x^3)$ dall'origine degli assi di riferimento, la funzione:

$$f(P) = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{x^1{}^2 + x^2{}^2 + x^3{}^2}}$$

è armonica ovunque tranne che nell'origine dove possiede una singolarità. Così pure la funzione :

$$f(P) = \frac{1}{R(PQ)}$$

dove $R(PQ)$ è la distanza del punto P da un prefissato punto Q , è armonica con singolarità nel punto Q : essa viene denominata la *funzione armonica*

elementare nello spazio tridimensionale. Nel piano la funzione armonica elementare è invece:

$$f(P) = \log \frac{1}{R(PQ)}.$$

Il campo avente come potenziale cinetico la funzione armonica elementare è quello dovuto ad una *sorgente* dislocata nel punto Q in cui possiede una singolarità; le superfici equipotenziali sono le sfere di centro Q ed i tubi di flusso sono i coni di vertice Q.

Se $C_1, C_2, \dots, C_n$ sono delle costanti e $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ sono n punti del dominio occupato dal fluido, è pure armonica la funzione:

$$f(P) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{R(PQ_i)}$$

che è analoga a quella che rappresenta il potenziale gravitazionale generato nello spazio da masse puntiformi proporzionali a $C_1, C_2, \dots, C_n$ dislocate nei punti $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$.

E' pure armonica, esternamente al volume τ , la funzione:

$$\varphi(P) = \int_{\tau} \frac{\rho(Q)}{R(PQ)} d\tau$$

dove $\rho(Q)$ è la densità della massa contenuta entro il volume τ . Esternamente a τ vale per $\varphi(P)$ l'equazione di Laplace:

$$\Delta\varphi = 0,$$

internamente vale invece l'equazione di Poisson:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Un'altra funzione armonica molto significativa è quella che rappresenta il potenziale di una *doppietta di sorgenti*, d'asse x e momento m data da:

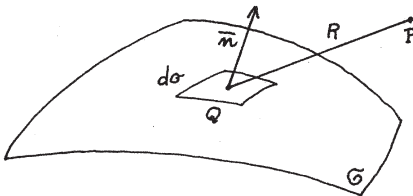
$$\varphi(P) = \frac{m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_Q} \frac{1}{R(PQ)}.$$

Ad essa si perviene considerando due sorgenti di intensità uguale ed opposta localizzate in due punti Q e Q' posti sull'asse delle x e distanti tra loro Δx . Facendo avvicinare Q' a Q e supponendo che l'intensità C diventi infinitamente grande al tendere di Δx a zero, in maniera che sia finito:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} C \cdot \Delta x = \frac{m}{4\pi},$$

si ha infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-C}{R(PQ)} + \frac{C}{R(PQ')} \right) &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} C \cdot \Delta x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{C}{R(PQ')} - \frac{C}{R(PQ)} \right)}{\Delta x} &= \frac{m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_Q} \frac{1}{R(PQ)}. \end{aligned}$$



Distribuyendo infine con continuità su di una superficie σ doppiette di momento $4\pi\mu(Q)d\sigma$ con asse orientato in ogni punto come il versore $\mathbf{n}$ della normale a σ , si ottiene la seguente funzione

armonica (*potenziale di doppio strato*):

$$\varphi(P) = \int_{\sigma} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} d\sigma$$

regolare esternamente a σ .

Proprietà delle funzioni armoniche.

Se f e g sono due funzioni regolari in un dominio τ e sulla sua frontiera σ , poichè valgono le identità:

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f \Delta g$$

$$\operatorname{div}(g \operatorname{grad} f) = \operatorname{grad} g \cdot \operatorname{grad} f + g \Delta f,$$

applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\tau} (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f \Delta g) d\tau &= \int_{\sigma} f \frac{dg}{dn} d\sigma \\ \int_{\tau} (\operatorname{grad} g \cdot \operatorname{grad} f + g \Delta f) d\tau &= \int_{\sigma} g \frac{df}{dn} d\sigma \end{aligned} \right\} \text{1° lemma di Green}$$

$$\int_{\tau} (g \Delta f - f \Delta g) d\tau = \int_{\sigma} \left(g \frac{df}{dn} - f \frac{dg}{dn} \right) d\sigma \quad \text{2° lemma di Green}$$

dove $\mathbf{n}$, versore della normale nel generico punto di σ , è orientato verso l'esterno di τ .

Se f e g sono funzioni armoniche e regolari in τ ed in σ :

(a)

$$\int_{\tau} (\operatorname{grad} g \cdot \operatorname{grad} f) d\tau = \int_{\sigma} g \frac{df}{dn} d\sigma = \int_{\sigma} f \frac{dg}{dn} d\sigma. \quad \text{1° lemma di Green}$$

(b)

$$\int_{\sigma} \left(g \frac{df}{dn} - f \frac{dg}{dn} \right) d\sigma = 0. \quad \text{2° lemma di Green}$$

(c)

Corollario a (b).

Ponendo in (b) $g = 1$:

$$\int_{\sigma} \frac{df}{dn} d\sigma = 0;$$

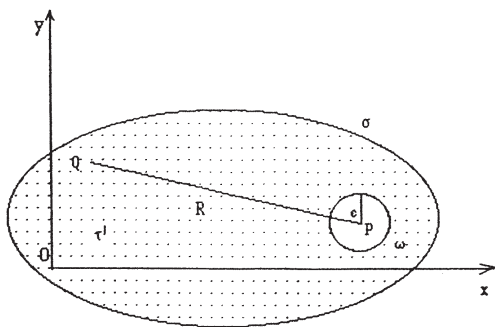
l'integrale, esteso al contorno σ , della derivata normale di una funzione armonica regolare in τ e su σ è nullo.

(d)

Formula di Green per le funzioni armoniche:

$$f(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left(\frac{1}{R} \frac{df}{dn} - f \frac{d(1/R)}{dn} \right) d\sigma.$$

Per dimostrare questa formula consideriamo, entro il dominio τ in cui è de-



finita la funzione armonica $f(P)$ ed è ivi regolare, un punto P ed isoliamolo mediante una sferetta ω di raggio infinitesimo ϵ e centro in P . Nel dominio τ' avente per contorno completo $\sigma + \omega$ sia la funzione f che la funzione $1/R(PQ)$, con Q punto corrente in τ' , sono armoniche e regolari.

Si può allora applicare ad esse in τ' il 2° lemma di Green:

$$\iint_{\sigma + \omega} \left(f \frac{d(1/R)}{dn} - \frac{1}{R} \frac{df}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Su ω , se $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido, è:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\epsilon}; \quad \frac{d(1/R)}{dn} = \frac{1}{\epsilon^2}; \quad d\sigma = \epsilon^2 d\Omega$$

per cui:

$$\iint_{\sigma} \left(f \frac{d(1/R)}{dn} - \frac{1}{R} \frac{df}{dn} \right) d\sigma + \iint_{\omega} \left(f \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{df}{dn} \right) \epsilon^2 d\Omega = 0.$$

Poichè:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\omega} \left(f - \epsilon \frac{df}{dn} \right) d\Omega = 4\pi f(P)$$

si ricava, come si voleva:

$$f(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left(\frac{1}{R} \frac{df}{dn} - f \frac{d(1/R)}{dn} \right) d\sigma$$

che consente di calcolare il valore che una funzione, armonica e regolare in un dominio τ , assume in un punto $P \in \tau$, qualora si conoscano i valori che essa assume sul contorno σ insieme con quelli della sua derivata normale.

Se la funzione $f(P)$ soddisfa in τ all'equazione di Poisson: $\Delta f = \chi$ invece che a quella di Laplace: $\Delta f = 0$, con procedimento del tutto analogo a quello ora esposto si ricava la formula a suo tempo citata:

$$f(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\chi(Q)}{R(PQ)} d\tau + \alpha(P)$$

con $\alpha(P)$ funzione armonica arbitraria.

(e)

Teorema di Gauss.

Se per calcolare il valore che una funzione armonica, regolare in una regione sferica di raggio a , assume nel centro P della sfera si usa la formula di Green, ricordando anche la proprietà (c) si ha:

$$f(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{a} \frac{df}{dn} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} f(-1/a^2) d\sigma = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\sigma} f d\sigma:$$

il valore che una funzione armonica assume nel centro di una sfera è la media dei valori che essa assume sulla superficie sferica.

(f)

1° corollario al teorema di Gauss.

I punti di massimo o di minimo di una funzione armonica $f(P)$ non possono cadere all'interno del dominio τ ove f è regolare, ma soltanto sul contorno.

(g)

2° corollario al teorema di Gauss.

Se una funzione armonica regolare in τ è costante sul contorno σ , è costante in tutto il dominio τ .

(h)

Da (g) si deduce che *se una funzione armonica $f(P)$ è ovunque regolare ed all'infinito assume il valore K finito, essa è uguale a K dappertutto.*

Dal corollario (g) si ottiene anche che *se una funzione armonica $f(P)$ regolare in t è nulla sul contorno, essa è ovunque nulla.*

Ciò si vede anche considerando il 1° lemma di Green e ponendo in esso $f=g$:

$$\int_{\tau} (\text{grad } f)^2 d\tau = \int_{\sigma} f \frac{df}{dn} d\sigma .$$

Se su σ è $f=0$, nei punti di τ è: $\text{grad } f = 0 \Rightarrow f = \text{cost.} \Rightarrow f = 0$.

Se su σ è $\frac{df}{dn} = 0$, nei punti di τ è: $\text{grad } f = 0 \Rightarrow f = \text{cost.}$

Segue che *se due funzioni armoniche f e g assumono valori uguali su σ , esse si identificano in τ ; se di esse coincidono su σ i valori delle derivate normali, in τ esse differiscono per una costante.*

Il problema di determinare entro τ una funzione armonica, assegnandone i valori sul contorno σ , è il cosiddetto problema di Dirichlet.

Il problema di determinare, a meno di una costante, una funzione armonica, assegnando su σ i valori della sua derivata normale (che ovviamente debbono soddisfare la condizione: $\int_{\sigma} \frac{df}{dn} d\sigma = 0$) è il

problema di Neumann.

Si dimostra che entrambi questi problemi ammettono soluzione e che essa è unica.

Campi armonici piani.

Sia: $\mathbf{v} = v_1(x, y) \mathbf{i} + v_2(x, y) \mathbf{j}$. Poichè il campo è insieme irrotazionale e solenoidale si possono introdurre sia il potenziale di velocità φ , tale che:

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

sia la funzione di Stokes ψ tale che:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Valgono pertanto, per le funzioni φ e ψ , le seguenti *relazioni di coniugio*.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Poichè è $\text{div } \mathbf{v} = 0$, è inoltre: $\Delta \varphi = 0$ ed anche $\Delta \psi = 0$: *le due funzioni φ e ψ sono funzioni armoniche nel piano del moto.*

E' facile vedere come, nota la funzione φ , si determina l'altra funzione ψ , e viceversa. Infatti:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy$$

da cui:

$$\psi(P) = \int_{\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \right) + \psi(P_*).$$

dove λ è un qualunque cammino congiungente un prefissato punto P_* col generico punto P .

Analogamente:

$$\varphi(P) = \int_{\lambda} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dx + \frac{\partial \psi}{\partial x} dy \right) + \varphi(P_*).$$

Tutte le proprietà riguardanti le funzioni armoniche valgono ovviamente anche nel piano. Qui bisogna però sostituire alla funzione armonica elementare $f(P) = \frac{1}{R(PQ)}$ la funzione $\log \frac{1}{R(PQ)}$, alla sfera la circonferenza ed alla superficie 4π della sfera di raggio unitario la lunghezza 2π della circonferenza pure di raggio unitario.

Consideriamo ora la combinazione lineare $\varphi(x, y) + i \psi(x, y)$, dove $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria. Mostriamo come le condizioni di coniugio per le funzioni φ e ψ sono necessarie e sufficienti per affermare che la

combinazione $\varphi(x, y) + i \psi(x, y)$ è una funzione analitica $f(z)$ della sola variabile complessa $z=x+iy$.

Infatti, se $\varphi(x, y) + i \psi(x, y)$ è una $f(z)$, essendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial z},$$

si richiede che sia:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \approx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

per cui:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

e quindi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Se viceversa sono valide le relazioni di coniugio per la parte reale ed il coefficiente dell'unità immaginaria, è facile vedere che:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varphi + i \psi) = -i \frac{\partial}{\partial y} (\varphi + i \psi)$$

il che vuol dire che $\varphi(x, y) + i \psi(x, y) = f(x+iy)$.

Le condizioni di coniugio sono dette *le relazioni di monogeneità di Cauchy - Riemann* che legano la parte reale ed il coefficiente dell'unità immaginaria di una funzione analitica della variabile complessa $z=x+iy$.

Ad ogni funzione $f(z)$ corrisponde dunque un campo armonico piano, di cui $f(z)$ costituisce il *potenziale complesso*, $\varphi(x, y)$ il potenziale cinetico e $\psi(x, y)$ la funzione di Stokes.

Consideriamo ora la funzione di variabile complessa:

$$w = \frac{df}{dz}$$

Poichè, come abbiamo visto, $\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}$, si ha:

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_1 - i v_2;$$

la funzione di variabile complessa w , detta *velocità complessa*, rappresenta, con la sua parte reale e con l'opposto del coefficiente dell'immaginario, il vettore velocità nel campo cinetico piano.

Consideriamo ora una linea λ e calcoliamo $\int_{\lambda} w dz$. E':

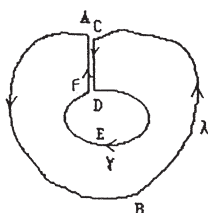
$$\begin{aligned} \int_{\lambda} w dz &= \int_{\lambda} (v_1 - i v_2)(dx + i dy) = \\ &= \int_{\lambda} (v_1 dx + v_2 dy) + i \int_{\lambda} (v_1 dy - v_2 dx) = \int_{\lambda} d\varphi + i \int_{\lambda} d\psi = \Gamma_{\lambda} + i \Phi_{\lambda}. \end{aligned}$$

Teoremi di Cauchy.

Se λ è una linea chiusa che delimita una regione in cui w è regolare, si ha:

$$\int_{\lambda} w dz = 0.$$

Se invece entro λ vi è una regione di singolarità per w di contorno γ , si può



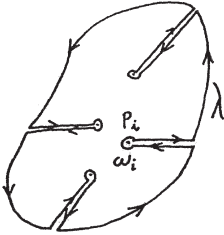
scrivere la relazione precedente lungo il contorno ABCDEF della regione in cui w è regolare. Essendo infinitamente vicini i due cammini CD ed FA percorsi in verso opposto, i loro contributi all'integrale si elidono. Con ovvio ragionamento si ricava, se anche γ viene percorso nel verso antiorario fissato su λ :

$$\int_{\lambda} w dz = \int_{\gamma} w dz \Rightarrow \Gamma_{\lambda} + i \Phi_{\lambda} \Rightarrow \Gamma_{\gamma} + i \Phi_{\gamma}$$

e quindi:

$$\Gamma_{\lambda} = \Gamma_{\gamma}; \quad \Phi_{\lambda} = \Phi_{\gamma}.$$

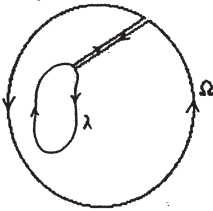
Se in particolare entro λ vi sono N punti $P_1, P_2, \dots, P_N$ di singolarità per w :



$$\int_{\lambda} w dz = \sum_{i=1}^N \int_{\omega_i} w dz$$

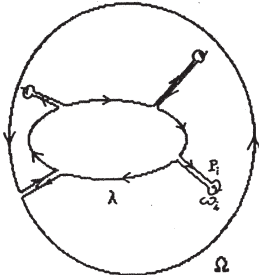
dove ω_i è un cerchietto di raggio infinitesimo e centro nel punto P_i ($i=1, 2, \dots, N$).

Se w è regolare esternamente a λ :



$$\int_{\lambda} w dz = \int_{\Omega} w dz$$

con Ω cerchio con centro al finito e raggio infinitamente grande. Se infine nella regione esterna a λ vi sono anche N punti $P_1, P_2, \dots, P_N$ di singolarità per w :



$$\int_{\lambda} w dz = \int_{\Omega} w dz - \sum_{i=1}^N \int_{\omega_i} w dz.$$

Esempi di campi cinetici armonici piani.

Come abbiamo già osservato, ad ogni funzione $f(z)$ della variabile complessa z si può associare un campo cinetico armonico piano di cui $f(z)$ è il potenziale complesso e w la velocità complessa. Presentiamo di seguito alcuni esempi particolarmente significativi.

a) Corrente uniforme parallela all'asse coordinato delle x .

$$f(z) = cz \Rightarrow \varphi = cx, \quad \psi = cy \quad (c > 0)$$

$$w(z) = c \Rightarrow v_1 = c, \quad v_2 = 0$$

b) Sorgente piana nell'origine degli assi coordinati.

$$f(z) = a \log z \Rightarrow \varphi = a \log \rho; \quad \psi = a\vartheta \quad (z = \rho e^{i\vartheta}; c > 0)$$

$$w = \frac{a}{z} \Rightarrow v_1 = \frac{ax}{x^2 + y^2}; \quad v_2 = \frac{ay}{x^2 + y^2}$$

La velocità è radiale ed il suo modulo è:

$$v = \frac{a}{\rho}$$

Se λ è una qualunque linea chiusa che racchiude nel suo interno la singolarità ubicata nell'origine O :

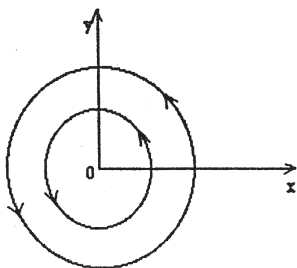
$$\Phi_\lambda = \int_\lambda d\varphi = \int_0^{2\pi} a d\vartheta = 2\pi a.$$

Il flusso così calcolato vien detto *la portata* della sorgente.

c) Vortice nell'origine degli assi coordinati.

$$f(z) = ib \log z \Rightarrow \varphi = -b\vartheta; \quad \psi = b \log \rho.$$

$$w = v_1 - i v_2 = i \frac{b}{z}.$$



Le linee di flusso di questo campo sono circonferenze concentriche di centro nel punto O in cui è ubicata una singolarità. Lungo una qualunque linea chiusa che racchiude O si ha:

$$\Gamma_\lambda = \int_\lambda d\varphi = -2\pi b.$$

Questa circolazione caratterizza il vortice e ne costituisce *la intensità*.

d) Vortice spirale nell'origine degli assi coordinati.

$$f(z) = (a+ib) \log z \Rightarrow \varphi = a \log \rho - b\vartheta; \quad \psi = a\vartheta + b \log \rho.$$

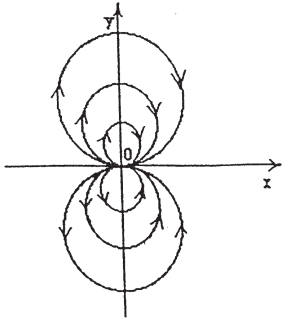
Le linee di flusso di questo campo sono spirali logaritmiche di equazione:

$$a\vartheta + b \log \rho = \text{cost.}$$

e) Doppietta nell'origine degli assi coordinati.

$$f(z) = \frac{b}{z} \Rightarrow \varphi = \frac{bx}{x^2 + y^2}; \quad \psi = -\frac{by}{x^2 + y^2}.$$

$$w = -\frac{b}{z^2}$$



Le linee di flusso di questo campo hanno equazioni:

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \text{cost.} = K$$

ossia :

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{K} y = 0;$$

sono circonferenze passanti per l'origine degli assi con centro nel punto di coordinate $(0, 1/2K)$.

Questo campo, che presenta una singolarità in 0, nasce dalla sovrapposizione di due vortici di intensità $-2\pi \frac{b}{2\epsilon}$ e $2\pi \frac{b}{2\epsilon}$ posti sull'asse delle y nei due punti di ordinate ϵ e $-\epsilon$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Il potenziale complesso associato a questi due vortici è:

$$i \frac{b}{2\epsilon} \log(z - i\epsilon) - i \frac{b}{2\epsilon} \log(z + i\epsilon).$$

Valutando il limite di questa espressione per $\epsilon \rightarrow 0$ con la regola de L'Hospital:

$$f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \frac{b}{2} \frac{\log(z - i\epsilon) - \log(z + i\epsilon)}{\epsilon} = i \frac{b}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{-i}{z - i\epsilon} - \frac{i}{z + i\epsilon}}{1} = \frac{b}{z}.$$

Si può mostrare che il campo di questa doppietta si può anche ottenere dalla composizione di due sorgenti disposte però sull'asse delle x.

f) Corrente traslatoria armonica che investe un ostacolo circolare.

Consideriamo il campo che nasce dalla composizione di una doppietta con una corrente traslatoria uniforme. E':

$$f(z) = cz + \frac{b}{z} \Rightarrow \varphi = cx + \frac{bx}{x^2 + y^2}; \quad \psi = cy - \frac{by}{x^2 + y^2}$$

$$w(z) = c - \frac{b}{z^2}.$$

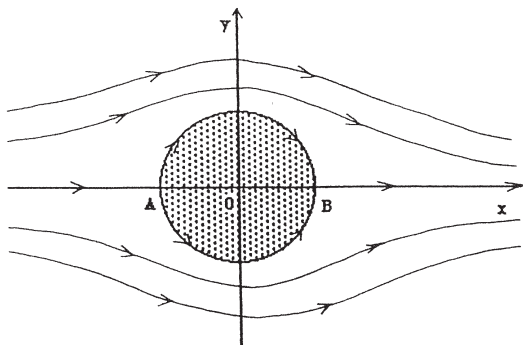
Le linee di flusso sono le cubiche di equazioni:

$$cy - \frac{by}{x^2 + y^2} = K = \text{cost.}$$

In particolare, per $K = 0$, si ha:

$$y \left(c - \frac{b}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

che si spezza nell'asse $y = 0$ e nella circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{b}{c}$.



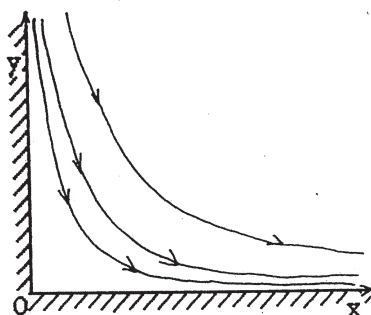
Il campo si interpreta così: una corrente traslatoria uniforme parallela all'asse delle x investe un profilo circolare di raggio $\sqrt{b/c}$ con centro posto nell'origine. Incontra la circonferenza nella prora A ed ivi si spezza in due: una parte lambisce la semicirconferenza superiore,

l'altra quella inferiore. Le due parti si riuniscono nella poppa B e da B il filone prosegue a valle lungo l'asse delle x . Gli altri filetti hanno un andamento del tipo di quello indicato nella figura. All'infinito è: $f(z) = cz$, $w = c$. Per $z = \pm \sqrt{b/c}$ è $w = 0$: in A e B la velocità si annulla.

g) Corrente che lambisce una parete ad angolo retto.

$$f(z) = z^2 \Rightarrow \varphi = x^2 - y^2; \quad \psi = 2xy.$$

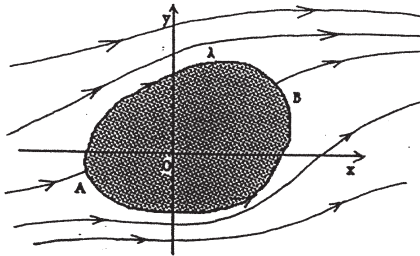
$$w = v_1 - i v_2 = 2x + i2y.$$



Corrente armonica piana fra pareti rigide.

Un problema importante è quello di determinare una corrente armonica piana nel dominio C limitato da due linee λ_0 e λ_1 . C ne costituisce pertanto un nastro di flusso. Si deve cercare il potenziale complesso $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, sapendo che su λ_0 la funzione $\psi(x, y)$ ha un valore costante, ad esempio nullo, e su λ_1 assume il valore costante ψ_1 dato dal flusso del nastro. Si è così condotti a risolvere per la funzione armonica $\psi(x, y)$ un problema di Dirichlet.

Corrente traslatoria che investe un profilo.



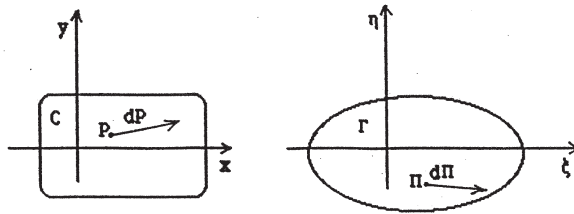
Si vuole determinare una corrente armonica nel campo C esterno ad un assegnato profilo rigido λ , quando la funzione $\psi(x, y)$ differisce dalla funzione di Stokes ψ relativa ad una corrente traslatoria uniforme diretta come l'asse delle x per una funzione armonica regolare in C , che si annulla all'infinito. Si tratta di cal-

colare $f(z) = \phi + i\psi$, sapendo che all'infinito la funzione armonica ψ si riduce a ψ ed assume il valore 0 sulla linea di flusso λ .

Può essere più comodo introdurre la funzione $F(z) = f(z) - cz = \phi + i\psi$ e porre il problema di determinare la funzione armonica Ψ regolare in C , nulla all'infinito e che nei punti del contorno λ assume valori uguali a $-\psi$. Anche questo, come si vede, è un particolare problema di Dirichlet piano.

Trasformazioni conformi.

Accanto alla variabile complessa $z = x + iy$, variabile nel dominio piano C , consideriamo un'altra variabile $\zeta = \xi + i\eta$ funzione invertibile di z e definita in un dominio Γ del piano ξ, η . Ad ogni punto P di C corrisponde un punto Π di Γ e viceversa; ad ogni linea λ di C una linea γ di Γ e viceversa.



La corrispondenza considerata è *conforme*, nel senso cioè che mantiene gli angoli: all'intorno di P corrisponde, *per similitudine*, un intorno di Π . Infatti, se dP è il vettore infinitesimo spiccato da P in C , ad esso corrisponde in Γ il vettore $d\Pi$ uscente da Π : il primo è rappresentato dal numero complesso dz ,

il secondo da $d\zeta = \frac{d\zeta}{dz} dz$. Quindi:

$$\left| \frac{d\Pi}{dP} \right| = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$$

e $\frac{d\zeta}{dz}$, che è la derivata di ζ rispetto a z , sappiamo che dipende solo da P e non dall'orientamento di dP . Ne consegue che il rapporto fra due segmenti corrispondenti infinitesimi è indipendente dall'orientamento dei segmenti. Ad un triangolo infinitesimo in C corrisponde un triangolo infinitesimo in Γ simile al precedente, e gli angoli del primo triangolo sono eguali a quelli corrispondenti del secondo.

Trasformazioni conformi di correnti armoniche piane.

Una trasformazione conforme muta il potenziale complesso $f(z)$ di una corrente armonica in C nel potenziale complesso $f[z(\zeta)]$ di una corrente armonica in Γ . Ad una linea di flusso λ in C fa corrispondere una linea γ di flusso per la seconda corrente in quanto lungo entrambe le linee la funzione di Stokes assume il medesimo valore costante, in virtù della trasformazione. Ne segue che alle pareti rigide lambite dalla prima corrente corrispondono pareti rigide per la seconda. Nota allora la corrente armonica che lambisce le due pareti rigide λ_0 e λ_1 è pure nota la corrente che scorre tra le pareti γ_0 e γ_1 tutte le volte che si conosce la trasformazione conforme che pone in corrispondenza il dominio C occupato dalla prima corrente col campo Γ della seconda.

Nota la corrente armonica piana che investe un profilo λ è pure nota la corrente armonica che investe il profilo γ ogniquale volta è data la trasformazione conforme che fa corrispondere al campo della prima corrente esterno a λ il campo della seconda esterno a γ , e che fa corrispondere al punto all'infinito del piano delle z il punto all'infinito del piano delle ζ .

Il potenziale complesso della corrente, trasformata della corrente traslatoria che investe il profilo λ circolare, è:

$$f[z(\zeta)] = c z(\zeta) + \frac{b}{z(\zeta)}$$

$$w(z) = \frac{df}{d\zeta} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \left(c - \frac{b}{z^2(\zeta)} \right) \frac{dz}{d\zeta}$$

La velocità asintotica della corrente che investe il profilo γ è:

$$w_{\infty} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} w(\zeta) = c \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dz}{d\zeta} :$$

questa non coincide in generale con la velocità asintotica della corrente che investe il cerchio.

Consideriamo ad esempio la seguente trasformazione conforme:

$$\zeta = hz + \frac{k}{z} \quad (h \text{ e } k \text{ reali}).$$

Ricordando l'espressione della variabile complessa z in forma trigonometrica: $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ si ha:

$$\zeta = h(\rho \cos \vartheta + i \rho \sin \vartheta) + \frac{k}{\rho} (\cos \vartheta - i \sin \vartheta)$$

e quindi:

$$\xi = \left(h\rho + \frac{k}{\rho} \right) \cos \vartheta ; \quad \eta = \left(h\rho - \frac{k}{\rho} \right) \sin \vartheta .$$

Questa trasformazione fa corrispondere al punto all'infinito del piano delle z quello del piano delle ζ ed al cerchio $\rho = 1$ l'ellisse di assi ξ ed η e di semiassi $(h+k)$ ed $(h-k)$. La trasformazione fa quindi corrispondere alla regione C esterna al cerchio con centro nell'origine degli assi e raggio unitario la regione esterna all'ellisse precedente. La corrente traslatoria che investe il profilo ellittico avrà allora come potenziale complesso la $f(z(\zeta))$ dove si dovrà porre $b = c$, perchè il raggio $\sqrt{b/c}$ del cerchio ora vale 1, e $z(\zeta)$ si ottiene risolvendo rispetto a z l'equazione di 2° grado:

$$\zeta = hz + \frac{k}{z} .$$

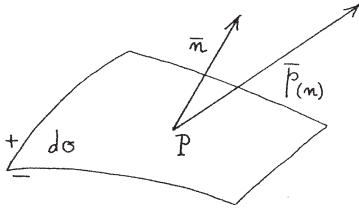
La velocità asintotica della corrente che investe il profilo ellittico è data da:

$$w_{\infty} = c \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dz}{d\zeta} = c \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{d\zeta/dz} = c \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{h - k/z^2} = c/h.$$

Questa corrente è orientata come l'asse delle ξ e c/h è il modulo della sua velocità asintotica.

§1.

Prima di poter scrivere le equazioni che reggono il moto di un fluido è necessario introdurre la nozione di *sforzo specifico* in un punto P di un mezzo continuo.



Si consideri in P un elemento superficiale $d\sigma$ e sia $\vec{n}$ la normale in P all'elemento stesso. Il verso della normale consente di attribuire "un segno" alle due facce di $d\sigma$: diciamo negativa la faccia che guarda verso la banda di ingresso della normale, po-

sitiva l'altra. Consideriamo l'azione che le particelle adiacenti alla faccia negativa di $d\sigma$ esercitano su quelle adiacenti alla faccia positiva. Essa si manifesta attraverso una forza che è proporzionale all'area dell'elemento $d\sigma$ e che potrà pertanto esprimersi $\vec{p}_{(n)} d\sigma$, volendo con ciò rendere palese la dipendenza di questa forza anche dalla giacitura dell'elemento $d\sigma$ stesso. Si definisce *sforzo in P relativo alla giacitura individuata da $\vec{n}$* il vettore $\vec{p}_{(n)}$ che, tenendo conto delle sue dimensioni fisiche, è evidentemente una forza per unità di superficie.

Ricordando la definizione di $\vec{p}_{(n)}$ e tenendo presente che vale il principio di azione e reazione è immediata la eguaglianza:

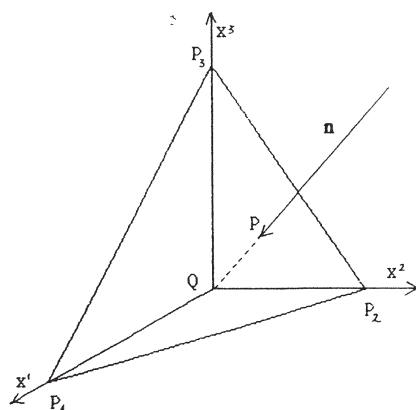
$$\vec{p}_{(n)} = -\vec{p}_{(-n)}.$$

Detti n_1, n_2, n_3 i coseni direttori della normale a $d\sigma$ rispetto agli assi di un riferimento cartesiano $(O; x^1, x^2, x^3)$, mostriamo che vale la seguente *relazione fondamentale di Cauchy*:

$$\vec{p}_{(n)} = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 = \sum_{i=1}^3 p_i n_i \quad \dots \quad (1)$$

Essa consente di esprimere lo sforzo $\vec{p}_{(n)}$ tramite gli sforzi p_1, p_2 e p_3 relativi a tre giaciture per P rispettivamente ortogonali agli assi x^1, x^2, x^3 .

Si consideri, per dimostrare la (1), il cosiddetto triedro di Cauchy così costruito: sulla direzione $\vec{n}$ passante per P, di coseni direttori n_1, n_2 ed n_3 , consideriamo, alla distanza h da P, il punto Q, da cui spicchiamo tre assi



x^1, x^2 ed x^3 paralleli e concordi con gli assi cartesiani. Siano P_1, P_2 e P_3 le intersezioni con x^1, x^2 ed x^3 del piano per P ortogonale ad n . Rimane così individuato il triedro $QP_1P_2P_3$ le cui facce indichiamo rispettivamente con $d\sigma = (P_1P_2P_3)$; $d\sigma_1 = (QP_2P_3)$; $d\sigma_2 = (QP_3P_1)$; $d\sigma_3 = (QP_1P_2)$, la cui altezza rispetto a $d\sigma$ indichiamo con h . È noto che risulta:

$$d\sigma_1 = d\sigma |n_1|; d\sigma_2 = d\sigma |n_2|; d\sigma_3 = d\sigma |n_3|.$$

Poiché (vedi figura) n forma con gli assi cartesiani angoli ottusi, i coseni direttori n_1, n_2 ed n_3 sono tutti negativi e quindi si avrà:

$$d\sigma_1 = -d\sigma n_1, d\sigma_2 = -d\sigma n_2, d\sigma_3 = -d\sigma n_3.$$

Si applichi ora al triedro $QP_1P_2P_3$, di cui indichiamo con dV il volume, il noto principio di D'Alembert secondo il quale, durante il moto, il complesso delle forze agenti sul triedro, comprese le forze d'inerzia, si fanno equilibrio in ogni istante.

Le forze presenti sono:

- le forze di massa, proporzionali alla massa del triedro;
- le forze d'inerzia, pur esse proporzionali alla massa;
- le forze superficiali agenti attraverso le quattro facce del triedro.

Detta ρ la densità materiale, sarà:

$$a) = dV F = \frac{1}{3} d\sigma h F \quad (F = \text{forza di massa per unità di volume})$$

$$b) = -\rho dV a = -\rho \frac{1}{3} d\sigma h a \quad (a = \text{accelerazione della particella fluida})$$

$$c) \text{ la forza agente sulla faccia } d\sigma_1 \text{ è } p_1 d\sigma_1 = -p_1 d\sigma n_1;$$

$$\text{la forza agente sulla faccia } d\sigma_2 \text{ è } p_2 d\sigma_2 = -p_2 d\sigma n_2;$$

$$\text{la forza agente sulla faccia } d\sigma_3 \text{ è } p_3 d\sigma_3 = -p_3 d\sigma n_3;$$

$$\text{la forza agente sulla faccia } d\sigma \text{ è } p_3 d\sigma_3 - p(n) d\sigma.$$

Secondo il principio di D'Alembert deve aversi:

$$\frac{1}{3} d\sigma h (\mathbf{F} - \rho \mathbf{a}) + \mathbf{p}_{(n)} d\sigma - \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i n_i d\sigma = 0$$

da cui:

$$\frac{1}{3} h (\mathbf{F} - \rho \mathbf{a}) + \mathbf{p}_{(n)} - \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i n_i = 0 .$$

Facendo ora tendere a zero il volume del triedro, ossia facendo tendere a zero h , si ricava:

$$\mathbf{p}_{(n)} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i n_i$$

che è appunto la relazione (1) cercata.

La (1) mostra che lo stato di sforzo nel punto P è assegnato dando i tre vettori $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$ o, che è lo stesso, il *tensore degli sforzi* p_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) le cui nove componenti sono gli elementi della matrice:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Gli elementi con gli indici eguali rappresentano gli sforzi normali agli elementi superficiali ortogonali alle direzioni degli assi x^1 , x^2 ed x^3 spiccati da P , gli altri gli sforzi tangenziali.

Si può poi dimostrare (noi omettiamo tale dimostrazione) che valgono le relazioni:

$$p_{ij} = p_{ji} \quad (i \neq j)$$

ossia *il tensore degli sforzi è simmetrico* e quindi bastano sei componenti per individuarlo.

Osservazione di Cauchy.

Se gli sforzi che si esercitano attraverso i vari elementi superficiali passanti per P sono normali ai rispettivi elementi, i corrispondenti sforzi specifici sono necessariamente eguali tra di loro.

$$\text{Ip.: } \mathbf{p}_{(n)} = p_n \mathbf{n}.$$

$$\text{Th.: } p_n = p_1 = p_2 = p_3.$$

Infatti, se $\mathbf{p}_{(n)} = p_n \mathbf{n}$, anche $p_1 = p_1 \mathbf{i}_1$, $p_2 = p_2 \mathbf{i}_2$, $p_3 = p_3 \mathbf{i}_3$. Per la (1) si avrà:

$$p_n \mathbf{n} = p_1 n_1 \mathbf{i}_1 + p_2 n_2 \mathbf{i}_2 + p_3 n_3 \mathbf{i}_3$$

ossia

$$p_n n_1 = p_1 n_1; \quad p_n n_2 = p_2 n_2; \quad p_n n_3 = p_3 n_3,$$

per cui:

$$p_n = p_1 = p_2 = p_3. \quad (\text{c.v.d.})$$

Posto allora:

$$p_n = p$$

potrà scriversi:

$$\mathbf{p}_{(n)} = p \mathbf{n}.$$

Questa circostanza si presenta, ad esempio, nei fluidi in quiete dove lo sforzo in un punto ha la natura di pressione in quel punto ed è indipendente dalla giacitura dell'elemento $d\sigma$ considerato. Ciò indipendentemente dalla natura fisica del fluido che, per questa caratteristica, si differenzia da tutti gli altri mezzi continui.

Nei fluidi in movimento, invece, questo carattere dello sforzo specifico non si mantiene se non per i cosiddetti *fluidi perfetti*, nei quali sono trascurabili gli effetti della viscosità.

In un *fluido reale* in moto, le componenti p_{jk} del tensore degli sforzi possono porsi sotto la forma:

$$p_{jk} = p a_{jk} + q_{jk} \quad (2)$$

dove :

$a_{jk} = \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k$ sono le componenti del tensore fondamentale:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & \text{per } j = k \\ a_{jk} = & \\ 0 & \text{per } j \neq k \end{array} \right);$$

p ha ancora il significato di pressione ed eguaglia, come nel caso statico, $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 p_{ii}$, ossia un terzo dell'invariante lineare del tensore degli sforzi; infine le q_{jk} sono le componenti del cosiddetto *deviatore*, nullo nel fluido in quiete, che dipendono dalle velocità di deformazione. L'esperienza suggerisce di porre:

$$q_{jk} = \frac{2}{3} \mu \chi - 2\mu \zeta_{jk} \quad (3)$$

dove:

μ = coefficiente di viscosità;

$$\chi = \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_{i/i};$$

$$\zeta_{jk} = \frac{1}{2} (v_{j/k} + v_{k/j}).$$

Nei fluidi incompressibili, o che si comportano come tali, si ha:

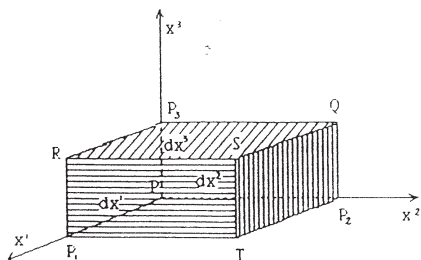
$$q_{jk} = -2\mu \zeta_{jk}$$

ossia vi è proporzionalità fra le componenti del deviatore e quelle del tensore di deformazione. In genere, invece, come afferma la (3), le q_{jk} sono funzioni lineari delle ζ_{jk} .

§ 2.

Equazioni indefinite di Navier - Poisson.

Per pervenire alle equazioni indefinite del moto del fluido consideriamo un elemento fluido a forma di parallelepipedo rettangolo infinitesimo con un vertice nel punto $P(x^1, x^2, x^3)$ e spigoli paralleli agli assi coordinati di lunghezza rispettivamente dx^1, dx^2, dx^3 . Applicando il principio di D'Alem-



bert dovremo imporre che sia nulla la somma di tutte le forze agenti sul parallelepipedo, compresa la forza d'inerzia. Detto dV il volume del parallelepipedo, le forze sono:

- a) la forza di massa $F dV$;
- b) la forza d'inerzia $- \rho dV \mathbf{a}$;
- c) le forze che il fluido circostante esercita sul parallelepipedo attraverso le sei facce infinitesime. Attraverso la faccia PP_2QP_3 agisce la forza $\mathbf{p}_1 dx^2 dx^3$ ed attraverso la faccia ad essa parallela P_1 agisce invece la forza :

$$- \left(\mathbf{p}_1 + \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x^1} dx^1 \right) dx^2 dx^3 .$$

Pertanto attraverso le due facce perpendicolari all'asse x^1 si manifesta sull'elemento fluido una forza pari a:

$$\mathbf{p}_1 dx^2 dx^3 - \left(\mathbf{p}_1 + \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x^1} dx^1 \right) dx^2 dx^3 = - \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x^1} dV .$$

In maniera del tutto analoga si trova che le forze agenti attraverso le altre facce sono date da:

$$- \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x^2} dV \quad ; \quad - \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x^3} dV .$$

Sarà allora, per quanto detto:

$$\mathbf{F} dV - \rho dV \mathbf{a} - \left(\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x^3} \right) dV = 0$$

da cui:

$$\boxed{\rho \mathbf{a} = \mathbf{F} - \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_{i/i}} \quad (4)$$

Mostriamo ora che, in virtù delle relazioni (2) e (3), si ha:

$$\sum_{i=1}^3 p_{i/i} = \text{grad } p - \frac{1}{3} \mu \text{ grad div } \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} . \quad (5)$$

Infatti, per la k^{ma} componente del vettore a primo membro della (5), si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 p_{ik/i} &= \sum_{i=1}^3 p_{/i} a_{ik} + \frac{2}{3} \mu \sum_{i=1}^3 \chi_{/i} a_{ik} - 2\mu \sum_{i=1}^3 \zeta_{ik/i} = \\ &= p_{/k} + \frac{2}{3} \mu \chi_{/k} - \mu \sum_{i=1}^3 v_{i/ik} - \mu \sum_{i=1}^3 v_{k/ii} = \\ &= p_{/k} + \frac{2}{3} \mu \chi_{/k} - \mu \chi_{/k} - \mu \Delta v_k = \\ &= p_{/k} - \frac{1}{3} \mu \chi_{/k} - \mu \Delta v_k . \end{aligned}$$

L'ultima espressione ottenuta coincide, come si voleva mostrare, con la k^{ma} componente del vettore a secondo membro della (5).

Sostituendo l'espressione (5) nella (4) si ottiene infine:

$$\boxed{\rho \mathbf{a} = \mathbf{F} - \text{grad } p + \frac{1}{3} \mu \text{ grad div } \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v}} \quad (6)$$

che è la classica *equazione di Navier-Poisson* della dinamica dei fluidi.

Essa è equivalente a tre equazioni scalari, quelle che si ricavano considerando le componenti di ambo i membri della (6) sugli assi cartesiani, che evidentemente non sono sufficienti per ricavare la velocità $\mathbf{v}$ (o meglio le sue tre componenti), la densità ρ e la pressione p . Il moto sarà infatti completamente assegnato individuando le cinque quantità incognite v_1, v_2, v_3, ρ e p . All'equazione (6) si debbono pertanto aggiungere altre due equazioni alle quali perverremo ricordando il cosiddetto *principio di conservazione della massa* ed facendo intervenire considerazioni di natura fisica suggerite dal comportamento termodinamico del fluido e dalla sua costituzione chimico-fisica.

Prima di passare alla deduzione di queste due ulteriori equazioni, è bene ricordare che nella (6) si deve porre, in luogo di $\mathbf{a}$, una delle due espressioni a suo tempo già trovate:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

ovvero:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + (\text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v}.$$

§3.

L'equazione di continuità.

Poichè, per il principio di conservazione della massa, la massa di ogni particella fluida si conserva, se $\rho d\tau$ è la massa dell'elemento fluido di volume $d\tau$, la derivata sostanziale di $\rho d\tau$ è nulla, ossia:

$$\frac{d(\rho d\tau)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} d\tau + \rho \frac{d(d\tau)}{dt} = 0.$$

Ricordando che l'incremento che subisce il volume elementare $d\tau$ nell'intervallo di tempo infinitesimo dt è dato da:

$$d(d\tau) = \chi d\tau dt$$

dove $\chi = \text{div } \mathbf{v}$ è la velocità di dilatazione cubica del fluido, si ha ancora:

$$\frac{d\rho}{dt} d\tau + \rho \chi d\tau dt = 0$$

ossia:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0} \quad (7)$$

Con facili calcoli è possibile vedere come la (7) può scriversi anche nella forma:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0} \quad (8)$$

La (7) e la (8) sono le due forme del tutto equivalenti in cui può scriversi *l'equazione di continuità* che traduce il principio di conservazione della massa.

§4

Equazione complementare.

La quinta equazione che ora vogliamo scrivere, che vien detta *equazione complementare* e che assegna un legame tra la pressione p e la densità ρ in ogni punto del campo, si ricava sia tenendo conto dell'equazione di stato per il fluido in esame, sia dell'equazione differenziale che riassume in sé i due principii fondamentali della termodinamica e che deve valere durante il moto del fluido. L'esperienza mostra che per ogni fluido esiste un legame finito ben determinato fra la pressione p , la densità ρ e la temperatura assoluta T . Tale legame può indicarsi genericamente scrivendo:

$$\Phi(p, \rho, T) = 0 \quad (9)$$

e costituisce, come è noto, *l'equazione di stato* del fluido.

Nel caso di un liquido la (9) non contiene la pressione p e dà un legame fra ρ e T :

$$\Phi(\rho, T) = 0.$$

Nel caso di un vapore la Φ non contiene p e la (9) si scrive così:

$$\Phi(p, T) = 0.$$

Nel caso di un gas perfetto (come si può ritenere ad esempio anche l'aria a temperatura ordinaria) vale la legge:

$$p = R\rho T$$

dove R è la costante dei gas.

Per i gas reali vale invece la legge di Van der Waals:

$$(p + a\rho^2)(1/\rho - b) = RT$$

che differisce da quella dei gas perfetti per la presenza di due termini correttivi che tengono conto del covolume delle molecole e delle forze intermolecolari.

Durante il moto del fluido in genere le tre variabili di stato cambiano e la loro evoluzione nel tempo è regolata dai principi della termodinamica che si traducono in una equazione differenziale che ora vogliamo dedurre.

Consideriamo un recipiente cilindrico chiuso ad una estremità da un diaframma fisso ed all'altra da un diaframma mobile d'area σ . Entro il cilindro poniamo l'unità di massa del gas: detto V il volume occupato, sarà $\rho V = 1$ e quindi $V = \frac{1}{\rho}$.

Entro il cilindro, in condizioni di equilibrio, le tre variabili di stato p , ρ , e T avranno ovunque lo stesso valore.

Se si sposta lentamente il diaframma mobile di un tratto infinitesimo ε , in modo da passare da uno stato di equilibrio ad un altro stato pure di equilibrio, le tre variabili subiranno variazioni infinitesime: siano dp ,

$d(1/p)$ e dT le variazioni della pressione, del volume specifico e della temperatura assoluta. Il primo principio della termodinamica, che attribuisce alla quantità di calore contenuta nel gas il significato di energia, consente di formulare un bilancio energetico per la trasformazione termodinamica avvenuta nel gas a causa dello spostamento del diaframma: la quantità di calore dQ acquisita dall'unità di massa nell'intervallo di tempo dt più il lavoro svolto dalle forze esterne eguaglia l'incremento dw della funzione di stato w che rappresenta *l'energia interna* (per unità di massa). Ossia:

$$dw = dQ - p\sigma$$

per cui, poichè per il secondo principio della termodinamica il calore assorbito dQ è uguale a TdS , essendo S la funzione di stato *entropia*, e poichè $\sigma = dV = d(1/p)$, si ha:

$$TdS = dw + p d(1/p) . \quad (10)$$

La (10) costituisce la *equazione fondamentale della termodinamica* e può scriversi anche nella forma:

$$TdS = dH - dp/p \quad (10')$$

avendo introdotto la nuova funzione di stato *entalpia* $H = w + p/p$.

In virtù della (10) dw rappresenta la quantità di calore assorbita a volume costante dall'unità di massa e quindi *la funzione di stato energia interna w può interpretarsi come il contenuto termico della unità di massa a volume costante*. Per la (10') dH rappresenta il calore assorbito dall'unità

di massa a pressione costante: la funzione di stato entalpia H dà pertanto il contenuto termico dell'unità di massa a pressione costante.

Nel caso di un gas perfetto, la cui equazione di stato è, come abbiamo ricordato, $p = R\rho T$, la energia interna w per unità di massa è semplicemente proporzionale alla temperatura assoluta T :

$$w = c_v T. \quad (11)$$

Il coefficiente c_v rappresenta il *calore specifico a volume costante* in quanto, quando il volume specifico rimane costante, ($d(1/\rho) = 0$) e la temperatura subisce un incremento dT , c_v dà il rapporto tra il calore $dQ = TdS$ assunto ed il corrispondente incremento di temperatura dT . Quando invece rimane costante la pressione, per la (10'), osservando che per un gas perfetto è:

$$H = w + p/\rho = c_v T + RT = (c_v + R) T$$

si ha:

$$TdS = (c_v + R) dT$$

e quindi $c_p = c_v + R$ dà il *calore specifico a pressione costante* in quanto è il rapporto tra il calore assorbito a pressione costante dalla unità di massa ed il corrispondente incremento di temperatura dT :

$$c_v = \frac{dQ}{dT} \quad \text{a volume costante;}$$

$$c_p = \frac{dQ}{dT} \quad \text{a pressione costante.}$$

Dall'equazione di stato (9), eliminando la temperatura assoluta T tramite l'equazione termodinamica (10) si trae, a seconda della natura del fluido e delle particolari condizioni termodinamiche in cui esso si trova, una

relazione, in termini finiti o differenziali, tra la pressione e la densità. Questa costituisce la cercata *equazione complementare*.

Per un liquido in condizioni isoterme dalla (9) si trae direttamente l'equazione complementare:

$$p = \text{cost.}$$

Spesso si suppone che questo si verifichi anche in condizioni non isoterme, ogniqualevolta si pensa di poter trascurare le piccole variazioni di densità di un liquido al variare della temperatura assoluta T .

Per un vapore in condizioni isoterme, sempre dalla (9) si trae l'equazione complementare:

$$p = \text{cost.}$$

Per un gas perfetto, in condizioni isoterme, l'equazione complementare è:

$$p/\rho = \text{cost.}$$

che traduce la nota legge di Boyle: *in un gas perfetto in condizioni isoterme il prodotto fra la pressione p ed il volume specifico $V = 1/\rho$ è costante*.

Per un gas perfetto in condizioni adiabatiche, in cui cioè non ci sia trasmissione di calore tra particelle contigue, per ricavare l'equazione complementare si debbono utilizzare sia la (9) che la (10) che, nel caso, hanno la forma:

$$p = R\rho T ;$$

$$c_v dT + p d(1/\rho) = 0$$

poichè $dw = c_v dT$. Infatti la ipotesi di adiabaticità richiede che sia:

$$dQ = TdS = 0,$$

ossia che l'entropia S di ogni particella si mantenga costante durante il moto. Si ricava:

$$dT = \frac{1}{R} d(p/\rho)$$

e quindi:

$$\frac{c_v}{R} d(p/\rho) + p d(1/\rho) = 0 ,$$

da cui:

$$c_v \frac{1}{\rho} dp + c_v p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + R p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

ossia:

$$c_v \frac{1}{\rho} dp + c_p p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

Introdotta il numero $\gamma = c_p/c_v$ si ottiene:

$$\frac{1}{p} dp - \gamma \frac{1}{\rho} d\rho = 0$$

e quindi:

$$d\left(\log \frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0.$$

Questa è l'equazione complementare per un gas perfetto in condizioni adiabatiche. Se poi si aggiunge l'ipotesi che l'entropia, che si conserva per ogni particella, sia eguale per tutte le particelle (condizioni isoentropiche) si deduce la relazione in termini finiti:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost.}$$

Per avere una idea degli ordini di grandezza delle caratteristiche dell'aria, scriviamo i valori approssimati della pressione p , della densità ρ e del coefficiente di viscosità μ in condizioni normali (a livello del mare ed a zero gradi):

$$p = 10^5 \text{ newton m}^{-2}; \rho = 1.3 \text{ Kg m}^{-3}; \mu = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ Kg m}^{-1}\text{sec}^{-1}.$$

In conclusione il sistema delle equazioni indefinite del moto di un fluido è:

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \mathbf{v}^2 + (\text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \right] = \mathbf{F} - \text{grad} p + \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ f(p, \rho) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

dove $\mathbf{F}$ è la forza di massa, generalmente assegnata, agente sull'unità di volume. Esso può anche scriversi in forma più compatta, introducendo l'operatore $\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x^3}$:

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \right] = \mathbf{F} - \nabla p + \frac{1}{3} \mu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ f(p, \rho) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Il sistema (12) è costituito da cinque equazioni scalari nelle cinque incognite v_1, v_2, v_3, ρ e p . Esse valgono in qualunque istante ed in qualunque punto interno al campo del moto ed affinché si possano determinare ovunque ed in ogni istante l'atto di moto, la densità e la pressione, ad esse debbono associarsi le *condizioni iniziali* e le *condizioni al contorno* (*condizioni ai limiti*). Si deve cioè assegnare l'atto di moto iniziale insieme con il campo delle pressioni (o di densità) allo stesso istante iniziale. Per assegnare poi le condizioni al contorno della regione occupata dal fluido si deve tener presente:

- a) che ci deve essere completa adesione del fluido alle pareti che delimitano il campo di moto e perciò la velocità $\mathbf{v}$ del fluido in un generico punto della parete deve coincidere con quella generalmente assegnata della parete in quel punto;
- b) che su ogni "*pelo libero*", superficie di separazione di fluidi differenti, devono essere eguali le componenti normali delle velocità nei due fluidi (ad esempio, acqua ed aria) e vi deve essere raccordo di sforzi.

Il sistema di equazioni (12) è un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del 2° ordine non lineari e la sua integrazione è in

generale molto ardua. Nel seguito, allo scopo di rendere questo sistema di equazioni più accessibile dal punto di vista matematico, verranno fatte ipotesi semplificative suggerite sia dalla natura del fluido, sia dai caratteri cinematici del moto.

A questo scopo è opportuno scrivere le equazioni del sistema (12) in forma adimensionale, per poter indagare sull'ordine di grandezza dei singoli termini che in esse figurano.

§5

Equazioni adimensionali.

In Aerodinamica è spesso conveniente assumere come grandezze fondamentali lunghezza, velocità e densità materiale e considerare tutte le altre grandezze come derivate da queste. Le dimensioni delle grandezze che interessano sono pertanto, in base alle loro definizioni, le seguenti:

$$\begin{array}{ll} [l] = [L] & [a] = [L^{-1}V^2] \\ [v] = [V] & [\rho] = [\rho V^2] \\ [\rho] = [\rho] & [F] = [L^{-1}\rho V^2] \\ [t] = [L V^{-1}] & [\mu] = [L\rho V] \end{array}$$

Osservato che i termini di (12₁) dimensionalmente sono uguali a $[L^{-1}\rho V^2]$, detta l_0 una lunghezza caratteristica del campo, ρ_0 una densità caratteristica e v_0 una velocità caratteristica (ad esempio la velocità asintotica della corrente), se si dividono tutti i suoi termini per $\frac{\rho_0 v_0^2}{l_0}$ si ottengono da essi quantità adimensionali e perciò indipendenti dalle unità del sistema di misura scelto. Cotrassegnando con $*$ le quantità adimensionali:

$$\begin{array}{llll} v^* = \frac{v}{v_0}, & \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, & x^{i*} = \frac{x^i}{l_0}, & t^* = \frac{t v_0}{l_0}, \\ F^* = \frac{F l_0}{\rho v_0^2}, & \mu^* = \frac{\mu}{\rho_0 v_0^2} & & \end{array}$$

ed osservato che:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{l_0}{v_0} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x^{i*}} = \frac{l_0}{\Delta x^i} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

per cui:

$$\nabla^* = l_0 \nabla, \quad \Delta^* = l_0^2 \Delta,$$

al sistema (12) si associa l'altro in termini adimensionali:

$$\begin{cases} \rho^* \left[\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \nabla^* (\mathbf{v}^{*2}) + (\nabla^* \times \mathbf{v}^*) \times \mathbf{v}^* \right] = \mathbf{F}^* - \nabla^* p^* + \frac{1}{R_e} \left[\frac{1}{3} \mu \nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*) + \Delta^* \mathbf{v}^* \right] \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* (\rho^* \mathbf{v}^*) = 0 \\ f(p^*, \rho^*) = 0 \end{cases} \quad (12')$$

avendo operato in maniera analoga nelle (12_{II}) e (12_{III}). Il numero puro R_e introdotto nella prima delle (12_I) è il cosiddetto *numero di Reynolds* che risulta così definito:

$$R_e = \frac{l_0 \rho_0 v_0}{\mu}.$$

§6.

Equazioni ridotte.

L'equazione di Navier-Poisson scritta in forma adimensionale si semplifica notevolmente quando alcuni suoi termini sono trascurabili rispetto agli altri.

Se ad esempio il numero di Reynolds è grandissimo, nelle regioni del dominio in cui il fattore tra parentesi che moltiplica $\frac{1}{R_e}$ si mantiene finito, si può trascurare l'ultimo termine che compare nella (12_I') e con ciò l'equazione stessa diviene del primo ordine come la (12_{II}'). In tal modo si viene a prescindere dalla viscosità del fluido ed il quadro delle equazioni indefinite, ripristinato in forma dimensionale, diviene:

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \right] = \mathbf{F} - \nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ f(p, \rho) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Queste sono le equazioni indefinite per i cosiddetti *fluidi perfetti*.

Nel caso invece di *moti lenti*, per i quali nella (12') sono trascurabili i termini $\nabla^*(\mathbf{v}^{*2})$ e $(\nabla^* \times \mathbf{v}^*) \times \mathbf{v}^*$ perchè quadratici in $\mathbf{v}^*$ e nelle derivate di $\mathbf{v}^*$, si hanno le equazioni di Stokes:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F} - \nabla p + \frac{1}{3} \mu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ f(p, \rho) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Le equazioni ridotte di Lamb, che si hanno quando nella (12') si trascura il termine $(\nabla^* \times \mathbf{v}^*) \times \mathbf{v}^*$ mantenendo invece $\nabla^*(\mathbf{v}^{*2})$, sono valide pertanto per quei moti in cui il vettore $\text{rot } \mathbf{v}$ è ovunque parallelo al vettore $\mathbf{v}$ stesso.

Come semplice applicazione delle equazioni (12), esaminiamo *un moto laminare* trattando il caso del moto stazionario di un fluido reale incompressibile non soggetto a forze di massa che si muova con velocità parallela all'asse x^1 . Indicata semplicemente con v l'unica componente non nulla della velocità e dette ora x, y e z le tre coordinate cartesiane, le equazioni del sistema (12) diventano:

$$\begin{cases} \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ 0 = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ 0 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 ; \quad \rho = \text{cost.} \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0;$$

e quindi:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \frac{dp}{dx}$$

con $v = v(y, z)$ e $p = p(x)$.

Poichè il primo membro della ultima equazione scritta non dipende da x ed il secondo membro invece non dipende da y e z deve essere, indicata con k una costante positiva::

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} = \text{cost.} = -k &\Rightarrow p = -kx + p_0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{k}{\mu} &\quad k \geq 0 \end{aligned}$$

dove si è premesso il segno - alla costante k supponendo che la pressione, se non è costante dappertutto, abbia *a monte* un valore p_0 maggiore che *a valle*.

Se ad esempio consideriamo il moto laminare stazionario fra due *piatti paralleli* infinitamente estesi, l'uno *fisso* di equazione $y = 0$ e l'altro, di equazione $y = h$, *mobile* con velocità V parallela all'asse x (caso di Couette), supponendo che non vi sia gradiente di pressione ($k = 0$) e che il moto del fluido sia dovuto solo al trascinamento provocato dal moto del piatto superiore, per ragioni di simmetria è: $v = v(y)$ per cui:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow v = ay + b.$$

Per l'aderenza del fluido alle pareti deve aversi (condizioni al contorno):

$$\text{per } y = 0 \quad v = 0; \quad \text{per } y = h \quad v = V$$

e quindi:

$$v = \frac{V}{h} y ; \quad p = p_0 .$$

Se invece entrambi i piatti sono *fissi* ($V = 0$) ma è presente un gradiente di pressione $-k$ (caso di Poiseuille) si ha:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{k}{\mu} \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{k}{2\mu} y^2 + ay + b .$$

Dovendo essere, per la completa adesione del fluido ai piatti, $v = 0$ sia per $y = 0$ che per $y = h$, si ricava per le costanti di integrazione a e b :

$$b = 0; \quad a = \frac{hk}{2\mu} ,$$

e quindi:

$$v = \frac{k}{2\mu} (hy - y^2) :$$

la velocità varia dunque tra i due piatti con legge quadratica.

Se il moto del fluido, dovuto ad un gradiente di pressione, si pensa entro un cilindro circolare di raggio a con asse parallelo all'asse delle x , passando a coordinate cilindriche r , θ ed x e notando che la velocità lungo il tubo dipenderà soltanto da r , l'equazione di Navier diventa:

$$\Delta v(r) = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{k}{\mu}$$

e quindi:

$$v(r) = A \log r + B - \frac{k}{4\mu} r^2 .$$

Poichè per $r \Rightarrow 0$ deve essere $v(r)$ finito e per $r = a$ deve aversi $v = 0$, per le due costanti di integrazione A e B si ricavano i due valori:

$$A = 0; \quad B = \frac{k}{4\mu} a^2$$

per cui:

$$v = \frac{k}{4\mu} (a^2 - r^2).$$

La velocità è dunque massima sull'asse e decresce con legge quadratica con la distanza dall'asse, fino ad annullarsi sulla parete del tubo.

E' interessante valutare il flusso nel tubo precedente:

$$\Phi = \int_{\sigma} v \, d\sigma = \int_0^a \frac{k}{4\mu} (a^2 - r^2) \cdot 2\pi r \, dr = \frac{k\pi a^4}{8\mu}.$$

Da questa formula, quando si conoscano il flusso Φ , il gradiente di pressione $-k$ ed il raggio a del tubo, si può ricavare il coefficiente μ di viscosità: *il tubo è così utilizzato come viscosimetro*.

Corrente di Stokes che investe una sfera.

Un esempio significativo di soluzione delle equazioni di Stokes *dei moti lenti*, per $\mathbf{F} = 0$, si ha considerando la corrente stazionaria lenta di un fluido incompressibile che investe una sfera.

Le equazioni di Stokes indefinite sono:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{v} = \text{grad } p \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \rho = \text{cost.} \end{cases}$$

Se c è la velocità asintotica della corrente *diretta come l'asse delle x* che investe una sfera di raggio a e centro nell'origine, si soddisfa alle equazioni scritte prendendo:

$$v_1 = \frac{3ac}{4r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) x^2 + c \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right)$$

$$v_2 = \frac{3ac}{4r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) xy$$

$$v_3 = \frac{3ac}{4r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) xz$$

$$p = -\frac{3ac\mu}{2r^3} x + p_0$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è la distanza del generico punto P del campo dal centro O della sfera e p_0 rappresenta la pressione asintotica della corrente.

Come si può rilevare, per $r = 0$ è:

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

conformemente al fatto che il fluido aderisce completamente alla sfera. Per $r \Rightarrow \infty$:

$$v_1 = c, v_2 = v_3 = 0.$$

Come si può constatare, e come è prevedibile, la corrente di Stokes che investe la sfera possiede simmetria cilindrica rispetto all'asse delle x .

§7.

Fluidi perfetti.

Con questa denominazione si denotano quei fluidi ideali per i quali il coefficiente di viscosità μ è nullo, ossia quei fluidi per i quali non sono presenti tutti quegli effetti che, anche se talvolta trascurabili, si manifestano sempre nel moto dei fluidi reali e che sono da attribuire alla presenza della viscosità.

Innanzitutto lo sforzo specifico $\mathbf{p}_{(n)}$ relativo alla giacitura ortogonale alla direzione $\mathbf{n}$ è, nei fluidi perfetti, diretto come $\mathbf{n}$ anche in condizioni di moto per cui si può scrivere sempre:

$$\mathbf{p}_{(n)} = p\mathbf{n}$$

dove lo scalare p , che ha la natura di pressione nel punto P, dipende generalmente, oltre che dal posto e dal tempo, anche dalla velocità del fluido.

Si può utilizzare il modello dei fluidi perfetti ogniqualvolta il numero di Reynolds:

$$R_e = \frac{l_0 \rho_0 v_0}{\mu}$$

è molto grande ed in quelle regioni del campo in cui il termine che nell'equazione di Navier in forma adimensionale ne moltiplica l'inverso si mantiene finito.

Pertanto le equazioni indefinite che reggono il moto dei fluidi perfetti sono:

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \mathbf{v}^2 + (\text{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \right] = \mathbf{F} - \text{grad } p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ f(p, \rho) = 0 \end{cases}$$

Esse sono cinque equazioni differenziali alle derivate parziali del 1° ordine nelle cinque funzioni incognite v_1, v_2, v_3, p e ρ ed ad esse vanno associate le condizioni ai limiti.

Le condizioni iniziali consistono nell'assegnare all'istante $t = 0$ l'atto di moto ed il campo delle pressioni e densità.

Le condizioni al contorno sono ora meno severe di quelle di cui si deve tener conto per i fluidi viscosi, in quanto ora le equazioni indefinite contengono soltanto derivate del 1° ordine. Bisogna ora rinunciare all'adesione completa del fluido alle pareti e pretendere soltanto la incompenetrabilità fra fluido e pareti di contorno, grazie alla quale il fluido non può che lambire le pareti.

§8.

Teorema di Bernoulli.

Come corollario alle equazioni indefinite vogliamo ora dedurre il *teorema di Bernoulli* valido nel *moto stazionario di un fluido perfetto soggetto a forze di massa (per unità di massa) conservative e quindi dipendenti da una funzione potenziale U .*

La prima delle equazioni indefinite diventa:

$$\frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{v}^2 + (\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Moltiplicando ambo i membri di questa eguaglianza per lo spostamento elementare $d\mathbf{P} = \mathbf{v} dt$ lungo una generica linea di corrente si ha:

$$\frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{v}^2 \cdot d\mathbf{P} + (\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = \text{grad } U \cdot d\mathbf{P} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot d\mathbf{P}$$

ossia:

$$d\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2\right) = dU - dh$$

dove si è tenuto conto che $d\mathbf{P}$ è parallelo a $\mathbf{v}$, per cui $(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = 0$ e dove si è introdotta la funzione integrale:

$$h = \int \frac{dp}{\rho}$$

con $\rho = \rho(P)$ in virtù dell'equazione complementare.

Si deduce il *teorema di Bernoulli* che afferma:
lungo ogni linea di corrente deve aversi:

$$d\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - U + h\right) = 0$$

ossia:

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - U + h = \text{cost.}$$

Ad esempio nel caso di un liquido soggetto al proprio peso per cui, detta z la quota, $U = -gz$ (g = accelerazione di gravità), si ha su ogni linea di corrente:

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{cost.}$$

Si può anche scrivere:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}^2}{g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{cost.}$$

lungo ogni linea di corrente è costante la somma di tre altezze: l'altezza cinetica $\frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}^2}{g}$, la quota geometrica z e l'altezza piezometrica $\frac{p}{\rho g}$.

Nel caso di un gas perfetto in *condizioni isoterme* è:

$$p = k \rho$$

per cui:

$$h = \int \frac{dp}{\rho} = \int k \frac{dp}{p} = k \log p.$$

In *condizioni isoentropiche*, invece:

$$p = k \rho^\gamma$$

per cui:

$$h = \int \frac{dp}{\rho} = \int k^\gamma \frac{dp}{p^\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} k^\gamma \frac{1}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Una generalizzazione del teorema di Bernoulli si può ottenere per i *moti non stazionari irrotazionali di un fluido perfetto soggetto a forze di massa conservative*.

Infatti, essendo $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ per ipotesi, si può introdurre il potenziale di velocità φ , tale che: $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$.

La prima delle equazioni indefinite porge:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{grad } \varphi) + \frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{v}^2 = \text{grad } U - \text{grad } h$$

con $h = \int \frac{dp}{\rho}$, per cui $\text{grad } h = \frac{1}{\rho} \text{grad } p$.

Si ottiene:

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - U + h \right) = \text{cost.}$$

da cui:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - U + h = C$$

con C che non dipende dal posto, ma al più dal tempo.

In particolare, se il moto, oltre che irrotazionale, è pure stazionario:

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - U + h = \text{cost.}$$

Questa relazione afferma la costanza del trinomio *in tutto il campo del moto* e non soltanto su di una linea di corrente, come invece si verificava nel teorema di Bernoulli originario.

Ciò avviene, come abbiamo visto, nei moti irrotazionali. Circostanza analoga si verifica anche nei moti stazionari *di Beltrami* dove è ovunque $\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ in quanto, per tali moti, $\text{rot } \mathbf{v}$ è parallelo a $\mathbf{v}$.

§9.

Correnti traslatorie euleriane.

Fra i vari moti dei fluidi perfetti rivestono particolare importanza le *correnti traslatorie euleriane che investono un ostacolo*. Si tratta di *moti stazionari irrotazionali di fluidi perfetti incompressibili soggetti a forze di massa di tipo conservativo*.

Essendo:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0$$

esiste un potenziale di velocità φ funzione armonica in tutto il campo del moto:

$$\Delta \varphi = 0.$$

In una corrente traslatoria euleriana si suppone, oltrechè la *regolarità* del moto, che il potenziale φ ad essa associato differisca, da quello di una corrente traslatoria uniforme, per una funzione φ^* regolare con tutte le sue derivate.

Se c è la velocità della corrente traslatoria uniforme, ad esempio parallela all'asse delle x , che investe l'ostacolo, deve essere:

$$\varphi = c x + \varphi^*$$

e poichè:

$$\Delta \phi^* = \Delta \phi - \Delta (c x) = 0$$

φ^* è una funzione armonica in tutta la regione occupata dal fluido. Essa deve annullarsi all'infinito perchè ivi il potenziale φ deve identificarsi con cx e poichè sul contorno σ dell'ostacolo deve essere $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ si dovrà imporre:

$$\frac{d\varphi^*}{dn} = -c \frac{dx}{dn} \quad \text{su } \sigma.$$

Se il contorno σ dell'ostacolo è assegnato, su di esso è dato il valore di $\frac{dx}{dn}$ e pertanto per conoscere il moto si deve risolvere un problema esterno di Neumann per la funzione armonica φ^* , nulla all'infinito e con derivata normale assegnata su σ .

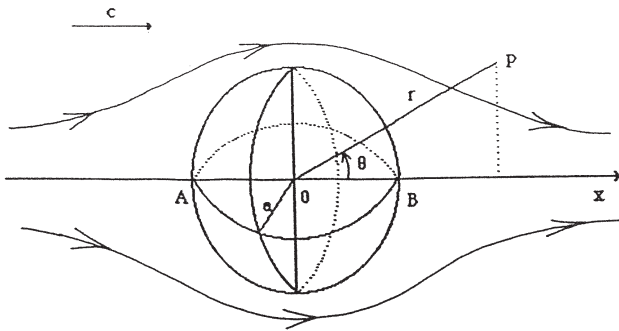
Noto il potenziale cinetico φ , si ricaverà immediatamente la pressione p utilizzando il teorema di Bernoulli generalizzato:

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} - U = \text{cost.}$$

Si noti quindi come, in una corrente euleriana, velocità e pressione sono determinati *in tutti i punti del campo* dai seguenti dati: *forma e dimensioni dell'ostacolo investito dalla corrente, velocità e pressione asintotiche.*

Esempio.

Si voglia determinare la corrente euleriana che investe una sfera di raggio a e centro nell'origine del sistema di riferimento, con velocità asintotica c parallela all'asse delle x .



E' intuitivo che tale corrente dovrà possedere simmetria cilindrica rispetto all'asse x , per cui il potenziale di velocità dovrà dipendere soltanto dalla distanza r dalla origine del punto P potenziato e dalla

sua coordinata x o, che è lo stesso, da r e dalla colatitudine θ .

Sappiamo che $1/r$ è la funzione armonica elementare a simmetria sferica e che anche le sue derivate sono funzioni armoniche, per cui sarà armonica la funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{x}{r^3}.$$

Si può allora pensare di soddisfare tutte le condizioni richieste per φ^* con una funzione armonica del tipo:

$$\varphi^* = \frac{k}{r^3} x = \frac{k}{r^2} \cos \theta$$

con la costante k per ora arbitraria.

Tale funzione è regolare in tutto il campo del moto ($r \geq a$) e si annulla all'infinito.

La sua derivata normale, sulla superficie della sfera, è:

$$\left(\frac{d\varphi^*}{dn} \right)_{\sigma} = \left(\frac{d\varphi^*}{dr} \right)_{r=a} = \left(-2 \frac{k}{r^3} \cos \theta \right)_{r=a} = -2 \frac{k}{a^3} \cos \theta.$$

Tenuto conto che x è uguale a $r \cos \theta$ per cui:

$$-c \left(\frac{dx}{dn} \right)_{\sigma} = -c \left(\frac{dx}{dr} \right)_{r=a} = -c \cos \theta,$$

la condizione al contorno su σ impone:

$$2 \frac{k}{a^3} = c \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{c}{2} a^3 .$$

Pertanto:

$$\varphi^* = \frac{c}{2} \frac{a^3}{r^3} x = \frac{c}{2} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta .$$

Il potenziale cinetico della corrente euleriana che investe la sfera è:

$$\varphi = c x \left(1 + \frac{a^3}{2 r^3} \right) = c r \left(1 + \frac{a^3}{2 r^3} \right) \cos \theta .$$

Le componenti longitudinale e radiale della velocità sono:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = c \left(1 + \frac{a^3}{2 r^3} \right) + c x \left(- \frac{3a^3}{2 r^5} x \right) = c \left(1 + \frac{a^3}{2 r^3} \right) - \frac{3ca^3 x^2}{2r^5}$$

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = c \cos \theta \left(1 + \frac{a^3}{2 r^3} \right) + c r \cos \theta \left(- \frac{3a^3}{2 r^4} \right) = \\ &= c \cos \theta \left(1 + \frac{a^3}{2 r^3} \right) - \frac{3}{2} \frac{a^3}{r^3} \cos \theta . \end{aligned}$$

Mentre v_r è, qualunque sia θ , uguale a zero per $r = a$ (il fluido lambisce la superficie dell'ostacolo sferico), la v_x si annulla nei punti di prora e di poppa $A=(r=a, x=-a)$ e $B=(r=a, x=a)$ soltanto: essi sono pertanto due *punti di ristagno* nel moto del fluido.

§ 10.

Corrente traslatoria euleriana piana.

Abbiamo già visto in Cinematica che una corrente traslatoria armonica (e quindi euleriana) di velocità asintotica c parallela all'asse x che investe un ostacolo circolare di raggio a e centro nell'origine è rappresentata dal potenziale complesso:

$$f(z) = c \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

con velocità complessa:

$$w(z) = \frac{df}{dz} = c \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right).$$

Se $z = z(\zeta) \Leftrightarrow \zeta = \zeta(z)$ è la trasformazione conforme che fa corrispondere alla regione del piano delle z , esterna al cerchio di raggio unitario, la regione del piano della variabile complessa ζ esterna alla curva γ , e che fa corrispondere i punti all'infinito dei due piani, alla corrente euleriana che investe l'ostacolo delimitato da γ sarà associato il potenziale complesso:

$$f(z) = c \left[z(\zeta) + \frac{1}{z(\zeta)} \right]$$

con velocità complessa:

$$\frac{df(\zeta)}{d\zeta} = c \left[1 - \frac{1}{z^2(\zeta)} \right].$$

Il valore asintotico della velocità complessa sarà:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{df(\zeta)}{d\zeta} = c \frac{dz}{d\zeta}.$$

Tramite il potenziale complesso si può determinare così il campo di velocità. La soluzione sarà completata determinando il campo di pressione con l'ausilio del teorema di Bernoulli.

Osservazioni.

I) Si può mostrare (noi omettiamo la dimostrazione), per quanto riguarda il comportamento all'infinito delle correnti euleriane, che *nello spazio* il valore della velocità si riduce all'infinito a c a meno di termini che si annullano almeno come $1/r^3$, mentre *nel piano* la velocità tende a c a meno di termini che si annullano all'infinito come $1/r^2$. Ossia φ^* si annulla all'infinito almeno come $1/r^2$ o $1/r$, rispettivamente nello spazio o nel piano.

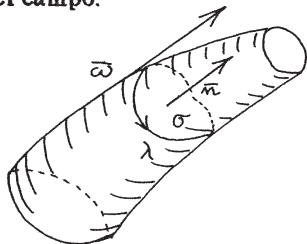
II) Se si confrontano i risultati teorici sulle correnti traslatorie euleriane con i dati forniti da esperienze fatte facendo investire un ostacolo da una

corrente stazionaria di un gas reale, si constata che mentre i dati sperimentali, a monte dell'ostacolo, coincidono con i risultati teorici, a valle dell'ostacolo compare invece una scia vorticoso di cui nella soluzione teorica non vi è traccia. L'esperienza poi mostra che sul contorno il fluido aderisce completamente all'ostacolo, mentre nella soluzione teorica la velocità non è nulla se non in due punti, la prora e la poppa.

§11.

Vortici.

Sia $\mathbf{v}$ la velocità del fluido in un punto P e $\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$ il vettore che rappresenta il doppio della velocità angolare dell'elemento fluido individuato da P. Poichè $\text{div rot } \mathbf{v} = 0$, $\boldsymbol{\omega}$ definisce un campo vettoriale solenoidale, perciò divisibile in tubi di flusso, detti *tubi vorticosi*. Tali tubi o si richiudono su sè stessi a mò di anello ovvero si estendono sino ai limiti del campo.



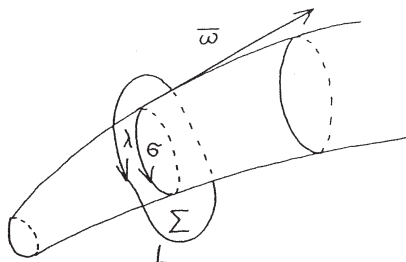
Se σ è una generica sezione di un tubo vorticoso, il flusso J di $2\boldsymbol{\omega}$, $\int_{\sigma} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$, non dipende dalla sezione considerata ma è un carattere tipico del tubo vorticoso, di cui dà l'*intensità*.

Per il teorema di Stokes si ha:

$$J = \int_{\sigma} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = \Gamma$$

l'intensità di un tubo vorticoso eguaglia la circolazione Γ del vettore $\mathbf{v}$ lungo una qualunque linea λ che si avvolge una sola volta sulla superficie del tubo stesso.

Consideriamo ora un tubo vorticoso esternamente al quale il moto sia irrotazionale. Ciò vuol dire che, mentre all'interno del tubo le particelle fluide si muovono traslando e ruotando, oltrechè deformandosi, all'esterno di esso traslano e si deformano senza ruotare, circolando attorno al tubo.



Di quest'ultima affermazione ci si può convincere mostrando che non è nulla la circolazione Γ_L di $\mathbf{v}$ lungo una linea L che abbraccia il tubo una sola volta. Se infatti Σ è una qualunque superficie con bordo L , è:

$$\Gamma_L = \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} = \int_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_{\sigma} \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

dove σ è la parte di Σ appartenente al tubo vorticoso.

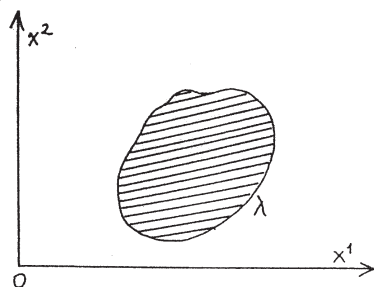
Essendo :

$$\int_{\sigma} \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = J \neq 0,$$

risulta appunto $\Gamma_L \neq 0$, che mostra inoltre che la circolazione è la medesima qualunque sia la linea L considerata.

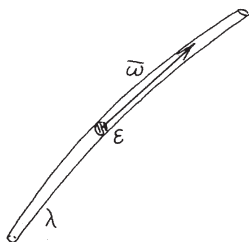
Il tubo vorticoso ora definito si dice che costituisce *un vortice* e la quantità J si chiama *intensità del vortice*.

Nei moti piani i vortici sono sempre aperti e sono delimitati da superfici cilindriche con generatrici perpendicolari al piano direttore del moto.



Sul piano direttore assunto come piano coordinato $(0, x^1, x^2)$, un vortice può rappresentarsi con la sua sola sezione, entro cui non è nullo la scalare $v_{2/1} - v_{1/2}$ che dà la componente di $\text{rot} \mathbf{v}$ lungo l'asse x^3 .

Esternamente alla sezione tale scalare è nullo.



Si parla di filetto vorticoso su di una linea λ quando la sezione trasversale ϵ del tubo vorticoso è estremamente piccola e le sue generatrici si identificano pressoché con la linea λ .

Se la intensità J del filetto vorticoso è finita, essendo:

$$J = \int_{\epsilon} \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 2 \omega \epsilon,$$

si deduce che gli elementi fluidi lungo λ posseggono velocità angolari estremamente grandi, per cui λ rappresenta una linea di singolarità nel campo del moto del fluido.

Un tipico esempio di filetto vorticoso è quello rettilineo, già considerato in Cinematica, diretto secondo l'asse delle z di un sistema di riferimento cartesiano. Esso genera un moto irrotazionale piano con una singolarità puntiforme nell'origine O .

Detta z l'affissa $x + i y$ di un generico punto del piano (O, x, y) direttore del moto, il potenziale complesso $f(z)$ associato a tale vortice puntiforme è:

$$f(z) = -\frac{J}{2\pi i} \log z$$

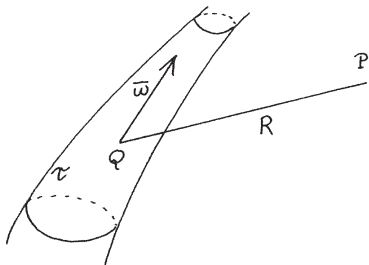
e la velocità complessa $w = v_x + i v_y$ è:

$$w(z) = \frac{df}{dz} = -\frac{J}{2\pi i z}.$$

Le linee di flusso sono circonferenze concentriche di centro O ed il modulo della velocità tutta trasversa, che vale $J/2\pi r$, è inversamente proporzionale al raggio r . L'intensità J del vortice eguaglia la circolazione lungo una qualunque linea chiusa che racchiuda nel suo interno la singolarità posta in O .

Un importante esempio di vortice finito è costituito dal *vortice cilindrico circolare*, nel quale il moto è rotazionale entro un cilindro circolare di raggio a , dove è $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P}-\mathbf{O})$, ed irrotazionale esternamente ad esso dove la velocità $\mathbf{v}$, tutta trasversa, ha modulo $v = \frac{\omega a^2}{r}$. Il moto è piano ed il suo piano direttore è perpendicolare all'asse z del cilindro. Esternamente al vortice la velocità, posto $J = 2\pi\omega a^2$, ha la stessa espressione che nel vortice puntiforme: pertanto il campo cinetico è armonico e quindi, come affermato, irrotazionale.

§ 12.

Campo cinetico provocato da un vortice.

Si consideri un vortice in un fluido perfetto infinitamente esteso.

In un generico punto Q della regione τ occupata dal vortice gli elementi fluidi posseggono una velocità angolare $\omega(Q)$ non nulla, mentre esternamente a τ è $\omega = 0$.

Sia P un generico punto del campo, interno od esterno al vortice. Sia $\mathbf{v}(P)$ la velocità del fluido in P ed $R(PQ)$ la distanza di P da Q. Se il fluido è incomprimibile, o non manifesta la propria comprimibilità, è ovunque $\text{div } \mathbf{v} = 0$ e quindi esiste un potenziale vettore $\mathbf{w}$ tale che:

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{w} .$$

Si è già visto in Cinematica che è sempre possibile scegliere $\mathbf{w}$ in maniera tale che la sua divergenza sia nulla:

$$\text{div } \mathbf{w} = 0 .$$

Sarà, in τ :

$$\text{rot rot } \mathbf{w} = 2 \, \omega$$

e poichè vale l'identità vettoriale:

$$\text{rot rot } \mathbf{w} = \text{grad div } \mathbf{w} - \Delta \mathbf{w}$$

nel nostro caso è:

$$\Delta \mathbf{w} = - 2 \, \omega .$$

Questa equazione di Poisson per il potenziale vettore ha la soluzione:

$$\mathbf{w}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{2\boldsymbol{\omega}(Q)}{R(PQ)} d\tau + \boldsymbol{\alpha}(P)$$

con $\boldsymbol{\alpha}(P)$ vettore armonico.

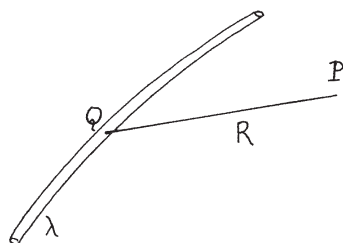
Di qui, a meno del rotore di un vettore $\boldsymbol{\alpha}(P)$ armonico, otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(P) &= \text{rot}_P \mathbf{w} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \text{rot}_P \frac{2\boldsymbol{\omega}(Q)}{R(PQ)} d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \left(\text{grad}_P \frac{1}{R(PQ)} \right) \times 2\boldsymbol{\omega} d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{(Q-P) \times 2\boldsymbol{\omega}}{R^3(PQ)} d\tau. \end{aligned}$$

La velocità $\mathbf{v}(P)$ si mantiene finita sia esternamente che internamente a τ e, se lo spazio è illimitato, si annulla all'infinito come $\frac{1}{R^2}$.

Il campo cinetico è armonico esternamente a τ ed il potenziale cinetico ad esso associato si mantiene finito anche all'infinito.

Si abbia in particolare un filetto vorticoso di intensità finita J . Se λ è la curva che lo rappresenta e se ϵ è la sua sezione trasversale infinitesima, tale che $2\omega\epsilon = J$, detto $\mathbf{t}$ il versore della tangente a λ nel punto Q , per cui:



$$d\lambda \mathbf{t} = dQ$$

si ha:

$$2\boldsymbol{\omega} d\tau = 2\omega\epsilon d\lambda \mathbf{t} = J dQ.$$

Il campo delle velocità generato dal filetto vorticoso si potrà allora esprimere così:

$$v(P) = \frac{J}{4\pi} \int_{\tau} \frac{(Q-P) \times dQ}{R^3(PQ)}$$

§ 13.

Campo cinetico piano provocato da vortici puntiformi.

Abbiamo già osservato che in un moto piano un vortice puntiforme si può ritenere come la traccia sul piano direttore del moto di un filetto vorticoso rettilineo ortogonale al piano.

Se il piano direttore è il piano Oxy, al vortice puntiforme di intensità J posto nell'origine si può associare il potenziale complesso:

$$f(z) = \frac{J}{2\pi i} \log z$$

e la velocità complessa:

$$w(z) = \frac{J}{2\pi iz}.$$

Posto:

$$z = r e^{i\theta}$$

si ha:

$$f(z) = \frac{J}{2\pi i} (\log r + i\theta) = \frac{J}{2\pi} \theta - i \frac{J}{2\pi} \log r.$$

La funzione di corrente ψ attraverso la quale si possono esprimere le componenti della velocità nel punto P nel modo seguente:

$$\dot{x} = u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \dot{y} = v = - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

è allora:

$$\psi = -\frac{J}{2\pi} \log r, \quad \text{con } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Analogamente la funzione di corrente relativa ad un vortice puntiforme posto nel punto $Q = (x_1, y_1)$ è:

$$\psi(P) = -\frac{J}{2\pi} \log r(QP)$$

$$\text{con } r(QP) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

Per n vortici localizzati nei punti $Q_k = (x_k, y_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) è:

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n J_k \log r_k$$

$$\text{con } r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}.$$

Chiaramente ogni vortice, trovandosi nel campo di moto, sarà pur esso provvisto di una velocità *indotta*, dovuta alla presenza degli altri vortici.

Se ad esempio si vuole trovare la velocità del vortice posto in $Q_1 = (x_1, y_1)$, la funzione di corrente che per esso interessa è:

$$\psi_1(x_1, y_1) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^n J_k \log r_{1k}$$

$$\text{con } r_{1k} = \sqrt{(x_1 - x_k)^2 + (y_1 - y_k)^2} \quad (k = 2, 3, \dots, n).$$

Le componenti della velocità del vortice saranno:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}; \quad \dot{y}_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}.$$

Introduciamo ora la funzione:

$$\begin{aligned}
 H(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{h < k=1}^n J_h J_k \log r_{hk} = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} (J_1 J_2 \log r_{12} + J_1 J_3 \log r_{13} + \dots + J_1 J_n \log r_{1n}) + \dots \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} (J_2 J_3 \log r_{23} + J_2 J_4 \log r_{24} + \dots + J_{n-1} J_n \log r_{n-1 n})
 \end{aligned}$$

$$\text{con } r_{hk} = \sqrt{(x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2}.$$

Separando in H i termini che contengono le coordinate x_1 ed y_1 può scriversi:

$$\begin{aligned}
 H &= -\frac{J_1}{2\pi} (J_2 \log r_{12} + J_3 \log r_{13} + \dots + J_n \log r_{1n}) + K_1 = \\
 &\quad - J_1 \psi_1 K_1
 \end{aligned}$$

ed in K_1 non figurano le coordinate x_1 ed y_1 .

Si ricava:

$$\psi_1 = \frac{H}{J_1} - \frac{K_1}{J_1}$$

per cui si può scrivere:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{J_1 \partial y_1} \quad \dot{y}_1 = -\frac{\partial H}{J_1 \partial x_1}.$$

Posto ora:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= q_1 \\
 J_1 y_1 &= p_1
 \end{aligned}$$

otteniamo:

$$q_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per $i = 2, 3, \dots, n$ in generale si potrà scrivere:

$$q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Queste sono le cosiddette *equazioni di Kirchhoff* che reggono il moto degli n vortici puntiformi. Esse sono del tutto analoghe alle equazioni canoniche di Hamilton valide durante il moto di un sistema meccanico conservativo ad n gradi di libertà, le cui variabili canoniche siano:

$$q_i = x_i \quad p_i = J_i y_i$$

e la cui funzione Hamiltoniana sia data da:

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{h < k=1}^n J_h J_k \log r_{hk}.$$

Risolvere le equazioni di Kirchhoff significa poter conoscere in ogni istante la ubicazione dei vortici e quindi avere la possibilità di trovare, in ogni istante, il campo di moto da essi provocato.

§14.

Il teorema di Thomson.

Si consideri il moto regolare di un fluido perfetto sotto l'azione di forze di massa conservative.

La equazione di Eulero è:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{grad} (U - h)$$

$$\text{con } h = \int \frac{dp}{\rho}.$$

Sia λ una linea chiusa nel campo del moto costituita da particelle fluide. Per via del movimento delle particelle tale linea si muoverà col fluido, deformandosi. Vale il seguente *teorema di Thomson*:

nel moto regolare di un fluido perfetto sotto l'azione di forze di massa conservative la circolazione Γ lungo una qualunque linea chiusa costituita sempre dalle medesime particelle non cambia col tempo.

Infatti, per definizione, la circolazione lungo una tale linea è data da:

$$\Gamma = \int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P}.$$

La sua derivata sostanziale è:

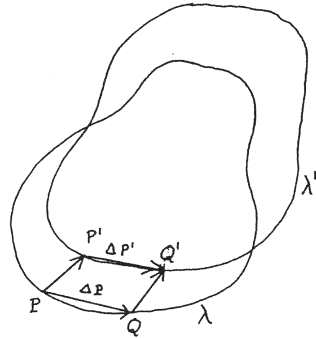
$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\lambda} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{P} + \int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot \frac{d(d\mathbf{P})}{dt}.$$

Ma:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{P} = \text{grad} (U - h) \cdot d\mathbf{P} = d(U - h)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{d(d\mathbf{P})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}' - \Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{Q}' - \mathbf{P}') - (\mathbf{Q} - \mathbf{P})}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{Q}' - \mathbf{Q}) - (\mathbf{P}' - \mathbf{P})}{\Delta t} = \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{Q}) - \mathbf{v}(\mathbf{P}) = d\mathbf{v} \end{aligned}$$



per cui :

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d(d\mathbf{P})}{dt} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2}v^2\right).$$

Quindi:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\lambda} d(U - h) + \int_{\lambda} d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = 0.$$

Essendo nulla la derivata sostanziale, la circolazione Γ lungo la linea λ costituita sempre dalle medesime particelle non cambia col tempo (ovviamente dove il moto è regolare).

Quale corollario al teorema di Thomson ricaviamo il *teorema di Lagrange*.
nel moto regolare di un fluido perfetto sotto l'azione di forze di massa conservative non possono formarsi vortici.

Infatti, se in un istante è $\Gamma = 0$ lungo qualunque linea chiusa, tale rimane, per il teorema di Thomson, negli istanti successivi, per cui, per il teorema di Stokes, è $\int_{\sigma} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$ in qualunque istante ed attraverso qualunque

superficie σ . Ciò vuol dire che ovunque, in qualunque istante, è $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Quindi se in un istante, per una certa parte di fluido, è $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, sarà sempre per quella parte $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Ciò prova il teorema di Lagrange.

In particolare, se il moto del fluido *parte dalla quiete*, in quella porzione di fluido *dove il moto è regolare non si possono formare vortici sotto l'azione di forze di massa conservative.*

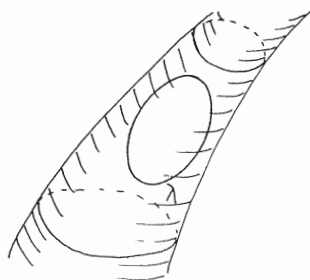
§15.

Teoremi di Helmholtz sui vortici.

Come diretta conseguenza del teorema di Thomson si deducono i due seguenti teoremi.

1° teorema di Helmholtz:

i tubi vorticosi, e quindi i vortici, sono formati sempre dalle medesime particelle.



Infatti, se λ è una linea chiusa tracciata su di un tubo vorticoso in maniera che *non* lo avvolga, la circolazione Γ lungo λ sarà nulla in virtù del teorema di Stokes, in quanto il flusso di $\text{rot } \mathbf{v}$ attraverso la porzione di tubo di flusso racchiusa da λ è nullo. Per il teorema di Thom=

son se Γ è nulla in un istante, tale rimarrà in qualunque istante successivo, ossia le particelle che costituiscono λ sono tali che lungo la linea da esse costituita è $\Gamma = 0$, cioè esse appartengono sempre ad un tubo vorticoso. Quindi un tubo vorticoso, e così pure un vortice, è sempre costituito dalle stesse particelle.

2° teorema di Helmholtz:

in un fluido perfetto in moto regolare sotto l'azione di forze di massa conservative, i vortici hanno sempre la stessa intensità.

Infatti l'intensità di un vortice eguaglia la circolazione lungo una linea chiusa del tubo vorticoso che si avvolga una sola volta attorno al tubo. Per il primo teorema di Helmholtz le particelle che formano λ costituiscono in ogni altro istante una linea chiusa che sta sempre sulla superficie del tubo e lo avvolge una sola volta. Per il teorema di Thomson la circolazione Γ lungo siffatta linea è sempre la stessa: neppure varia l'intensità J del vortice, che è appunto uguale a Γ .

Dunque i vortici in un fluido perfetto sotto l'azione di forze di massa conservative *non possono né crearsi né distruggersi* dove il moto è regolare. Si noti però che un vortice può dividersi in più vortici o filetti vorticosi, la somma delle cui intensità eguaglia la intensità originaria e viceversa più vortici o filetti possono riunirsi in uno solo di intensità uguale alla somma delle intensità originarie.

Osservazione.

Tutti i teoremi fin qui ricordati riguardano i fluidi perfetti. Nei fluidi reali, anche sotto l'azione di forze di massa conservative ed in condizioni di regolarità del moto, possono formarsi o distruggersi vortici. Essi compaiono soprattutto in prossimità di pareti rigide, a valle di ostacoli investiti da una corrente, nel lembo d'uscita di un'ala all'avvio del moto.

Comunque la costanza della circolazione è sensibilmente verificata lungo linee chiuse formate sempre dalle medesime particelle, come può rilevarsi negli anelli di fumo in aria tranquilla. Anche la difficoltà di strappare una particella da un vortice può verificarsi abbastanza con l'esperienza pensando ad esempio alla difficoltà di un nuotatore di liberarsi da un vortice che lo ha ghermito.

§ 16.

In un campo di moto piano, oltre ai vortici puntiformi, possono essere presenti altri tipi di singolarità, quali ad esempio le sorgenti e le doppiette. Se dislocate nel punto di affissa $z_0 = x_0 + i y_0$, ad esse si possono associare rispettivamente i potenziali complessi:

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \log(z - z_0) \quad \text{da cui} \quad w(z) = \frac{q}{2\pi(z - z_0)}$$

ed

$$f(z) = \frac{m}{2\pi(z - z_0)} \quad \text{da cui} \quad w(z) = -\frac{m}{2\pi(z - z_0)^2}.$$

Mostriamo come tutte queste singolarità possono essere utilizzate per costruire correnti armoniche regolari che investono un ostacolo S delimitato da una linea λ .

Consideriamo dapprima una corrente traslatoria euleriana che investe un ostacolo. Il campo cinetico di questa corrente è armonico e regolare nella regione σ esterna a λ e se c è la velocità asintotica della corrente parallela all'asse delle x , il potenziale cinetico ad essa associato è:

$$\varphi(x, y) = cx + \varphi^*(x, y)$$

dove φ^* è una funzione armonica in σ che all'infinito si annulla almeno come $1/r$ (condizioni asintotiche euleriane per le correnti piane).

Consideriamo la funzione armonica φ^* prolungata anche dentro S . Se φ^* fosse regolare in tutto $\sigma + S$, essendo nulla all'infinito sarebbe tale dappertutto, ossia sarebbe ovunque $\varphi(x, y) = cx$ e la presenza dell'ostacolo non perturberebbe la corrente traslatoria uniforme. Poiché ciò non è, segue che φ^* , e quindi anche φ , deve presentare singolarità entro S .

Una corrente euleriana, virtualmente prolungata entro il solido che investe, presenta dunque, nella regione realmente occupata dal solido, delle singolarità che diremo *singolarità virtuali*.

Operiamo ora inversamente: assegnamo una distribuzione di singolarità che inducano un moto che si spegne all'infinito e sovrapponiamovi una corrente traslatoria uniforme. Se il campo cinetico così ottenuto ammette una linea di flusso λ che racchiude tutte le singolarità, esternamente a λ si ha una corrente armonica e regolare che si può pensare che investa un ostacolo delimitato dal profilo λ . Si possono così avere correnti euleriane se all'infinito sono soddisfatte le condizioni asintotiche proprie di tali correnti. Si possono altresì ottenere correnti non euleriane se tali condizioni asintotiche non sono verificate.

Proponiamo ora alcuni esempi di correnti armoniche piane ottenute con questo *metodo*, detto appunto *delle singolarità virtuali*.

1°)

Corrente piana non euleriana provocata da una sorgente virtuale di portata q posta nell'origine, alla quale è sovrapposta una corrente traslatoria uniforme con velocità c parallela all'asse delle x .

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \log(z) + cz =$$

$$= \frac{q}{2\pi} (\log r + i\theta) +$$

$$+ cr (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$w(z) = \frac{q}{2\pi z} + c.$$

La funzione di Stokes è:

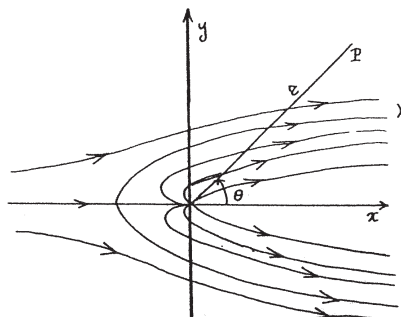
$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{2\pi} \theta + cr \sin \theta.$$

Consideriamo la linea di flusso
 λ di equazione:

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{2}$$

ossia:

$$r = \frac{q}{2\pi c} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta}.$$



Poiché per $\theta = \pi$ è $r = q/2\pi c$, per $\theta = \pm \pi/2$ è $r = q/4c$, ed è $\lim_{\theta \rightarrow 0} r = \infty$, il suo andamento è grosso modo quello indicato in figura. Nella prora, di affissa $z = -\frac{q}{2\pi c}$, la w , e quindi la velocità, si annulla: ivi si ha per il fluido un *punto di stagnazione*.

La linea λ divide il piano in due regioni: in quella che contiene la sorgente il campo presenta una singolarità (appunto la sorgente), nell'altra il campo di velocità è ovunque regolare. Tale campo è quello di una corrente traslatoria piana che investe un ostacolo delimitato dalla linea λ , il cosiddetto *semicorpo piano*.

2°)

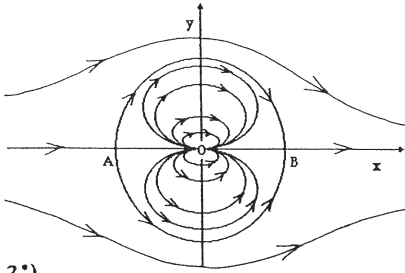
Corrente piana euleriana ottenuta dalla sovrapposizione di una corrente traslatoria uniforme ad una doppietta virtuale posta nell'origine.

$$f(z) = cz + \frac{m}{2\pi z} \quad \text{da cui:} \quad w(z) = c - \frac{m}{2\pi z^2}.$$

Posto:

$$\frac{m}{2\pi c} = a^2$$

le formule precedenti diventano:



$$f(z) = c \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad w(z) = c \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)$$

e queste definiscono, esternamente ad un circonferenza λ con centro nell'origine e raggio a , la corrente euleriana che investe un profilo circolare.

3°)

Corrente non euleriana circolatoria che avvolge una circonferenza con centro nell'origine e raggio arbitrario, dovuta ad un vortice virtuale di intensità J posto nell'origine.

$$f(z) = \frac{J}{2\pi i} \log z, \quad w(z) = \frac{J}{2\pi i z}$$

Le linee di flusso sono circonferenze ed il potenziale cinetico $\phi = \frac{J\theta}{2\pi}$ non è una funzione uniforme: lungo una qualunque linea chiusa che racchiude l'origine la circolazione è $\Gamma = J$.

4°)

Corrente non euleriana traslocircolatoria provocata sovrapponendo ad una corrente traslatoria uniforme il campo di una doppietta virtuale di momento m e di un vortice virtuale di intensità J entrambi nell'origine.

Si ha:

$$f(z) = cz + \frac{m}{2\pi z} + \frac{J}{2\pi i} \log z$$

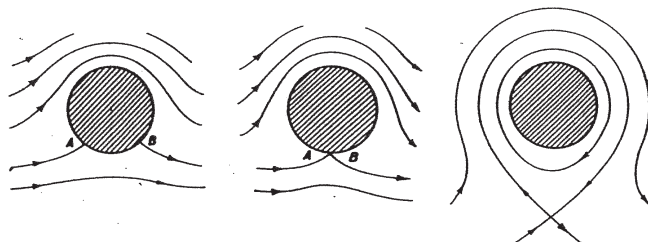
e ponendo $\frac{m}{2\pi c} = a^2$,

$$f(z) = c \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z$$

$$w(z) = c \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z}$$

Questa corrente è regolare esternamente al profilo circolare λ con centro nell'origine e raggio $a = \sqrt{\frac{m}{2\pi c}}$, ha velocità asintotica c e la sua circolazione Γ lungo una qualunque linea chiusa che racchiude al suo interno la circonferenza eguaglia la intensità J del vortice.

La corrente traslocircolatoria considerata non è euleriana perchè il suo potenziale cinetico non è una funzione uniforme ed il potenziale complesso $f(z)$ differisce dal potenziale cz della corrente traslatoria per una funzione che diviene infinita all'infinito.



Il punto A di prora ed il punto B di poppa sono i punti del profilo circolare λ ove è $w = 0$. La velocità complessa $w(z)$ è nulla quando:

$$z^2 - a^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z = 0.$$

Nei punti del profilo circolare è $z = a e^{i\theta}$ e quindi la velocità si annulla nei punti di λ per cui è:

$$\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi ac}.$$

Se $\Gamma < 4\pi ac$ la prora e la poppa sono due punti distinti, se $\Gamma = 4\pi ac$ sono coincidenti e se $\Gamma > 4\pi ac$ non vi sono punti sul profilo in cui la velocità si annulla.

5°).

Se infine $z = z(\zeta) \Leftrightarrow \zeta = \zeta(z)$ rappresenta la trasformazione conforme che fa corrispondere alla regione esterna al cerchio di cui al quarto esempio la regione esterna ad una curva chiusa γ del piano delle ζ , ai punti della circonferenza i punti di γ ed al punto all'infinito del piano delle z quello del piano delle ζ , alla corrente traslocircolatoria che investe un profilo γ si associano:

$$f(\zeta) = c \left(z(\zeta) + \frac{a^2}{z(\zeta)} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z(\zeta)$$

$$w(\zeta) = \left\{ c \left(1 - \frac{a^2}{z^2(\zeta)} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z(\zeta)} \right\} \frac{dz}{d\zeta}.$$

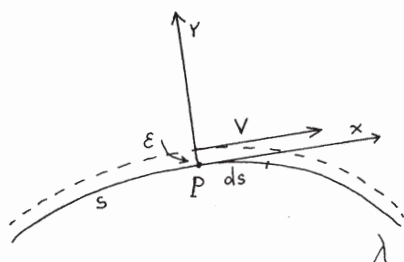
La circolazione relativa a γ è uguale a quella attorno al profilo circolare e la velocità asintotica è:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} |w| = c \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|.$$

§ 17.

Quando un fluido reale lambisce una parete σ fissa, nei punti di essa la velocità delle particelle è nulla, contrariamente a quanto si trova trattando il fluido come perfetto. E' però possibile, senza rinunciare allo schema che fa capo al fluido perfetto, tener conto della circostanza che su σ la velocità è nulla interponendo fra la corrente e la parete dell'ostacolo un esile strato fluido attraverso il quale la velocità passa bruscamente dal valore zero sulla parete al valore finito che le compete nella corrente in prossimità di σ .

Trattando per semplicità il caso piano, la superficie σ viene rappresentata nel piano direttore da una linea λ di discontinuità per la velocità.



Facciamo vedere come a questa linea di discontinuità si può pensare sostituita una distribuzione continua di vortici di opportuna intensità. Sostituiamo a λ uno straterello di spessore ϵ infinitesimo attraverso il quale si verifica il brusco passaggio dal valore zero al valore V della velocità.

Orientando come in figura un sistema di assi cartesiani x ed y uscenti da P , la componente di $\text{rot } \mathbf{v}$ secondo l'asse z normale al piano del moto risulta:

$$(\text{rot } \mathbf{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{V}{\epsilon}$$

a meno di termini trascurabili rispetto al termine $-\frac{V}{\epsilon}$ di modulo infinitamente grande.

Detto ds l'elemento d'arco su λ uscente da P , ϵds è l'area infinitesima relativa al punto P di ascissa s . A detta area si può associare un vortice puntiforme posto in P di intensità:

$$dJ = (\text{rot } \mathbf{v})_z \epsilon ds.$$

Pertanto il brusco passaggio della velocità dal valore nullo al valore V si può ritenere provocato da un vortice puntiforme posto in P di intensità:

$$dJ = - V ds.$$

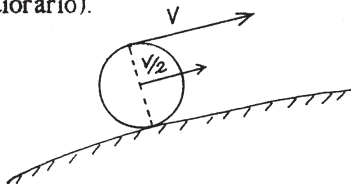
Ripetendo questo per ogni punto P di λ si può allora dire che alla linea λ di discontinuità è possibile sostituire una distribuzione continua di vortici lungo λ di *densità*:

$$j(s) = - V(s).$$

L'intensità complessiva dei vortici distribuiti su λ è allora:

$$J = - \int_{\lambda} V(s) ds = \Gamma$$

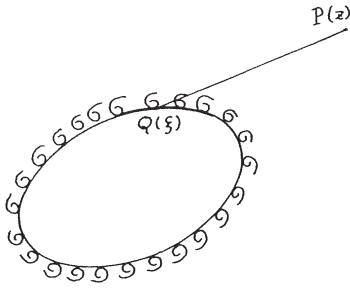
essendo Γ il valore della circolazione attorno al profilo (calcolata in senso antiorario).



E' interessante osservare che i vortici distribuiti su una parete rigida immobile si comportano in sostanza come rotelline che rotolano senza strisciare sulla parete.

Nel punto di contatto con la parete la velocità è nulla, nel punto diametralmente opposto la velocità vale quella del fluido; il centro della rotellina avanza con velocità $V/2$.

Notiamo infine che il campo cinetico armonico piano indotto dai vortici distribuiti sul profilo λ ha, in un punto di affissa z , potenziale complesso e velocità complessa:



$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} V(s) \log[z - \zeta(s)] ds,$$

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} \frac{V(s) ds}{\zeta(s) - z}.$$

$\zeta(s)$ è l'affissa del generico punto di λ di ascissa curvilinea s e $V(s)$ è la componente tangenziale della velocità in tale punto. In sostanza ciò traduce il fatto:

in un campo cinetico armonico regolare la velocità in un punto del campo è quella provocata da uno strato di vortici distribuiti al contorno con densità di intensità opposta alla componente della velocità tangenziale al contorno stesso.

§ 18.

Consideriamo una corrente irrotazionale piana che investe un profilo di contorno λ lungo il quale si può pensare che ci sia una distribuzione continua di vortici. Supponiamo inoltre che in seno alla corrente possano essere presenti vortici puntiformi. Sappiamo che, per il teorema di Stokes, è nulla la somma algebrica delle circolazioni lungo una linea chiusa che avvolge tutti i vortici distribuiti su λ , lungo le linee chiuse ω che racchiudono i vortici puntiformi e lungo una circonferenza Ω con centro al finito e raggio infinitamente grande (percorso in senso antiorario, se le altre linee sono percorse in senso orario). Riesce allora naturale classificare le correnti irrotazionali piane nel modo seguente:

- (a) correnti irrotazionali *regolari*, per le quali è *nulla il vortice all'infinito*;
- (b) correnti irrotazionali *regolari*, per le quali *non è nullo il vortice all'infinito*;
- (c) correnti irrotazionali *non regolari*, in seno alle quali vi sono vortici puntiformi che costituiscono singolarità nel campo del moto.

Per le correnti del tipo (a) il potenziale cinetico è regolare al finito ed uniforme all'infinito. I soli vortici presenti sono solo quelli distribuiti sul contorno λ del profilo e la loro intensità complessiva deve essere nulla.

Le correnti traslatorie euleriane costituiscono un cospicuo esempio di correnti del tipo (a). In esse il potenziale di velocità complesso è una

funzione regolare e differisce da quello di una corrente traslatoria uniforme per una funzione che si annulla all'infinito.

Per le correnti del tipo (b) il potenziale cinetico è una funzione regolare al finito ma non può essere uniforme all'infinito.

A questo tipo appartengono le correnti circolatorie e le correnti traslocircolatorie. Per esse il potenziale complesso differisce da quello di una corrente traslatoria uniforme per una funzione che diviene infinita all'infinito.

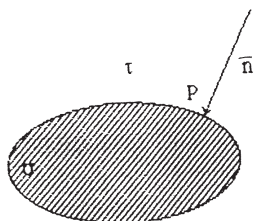
Per le correnti del tipo (c) il potenziale complesso presenta singolarità entro il campo occupato dalla corrente.

Esempi importanti di questo tipo sono dati dalle correnti armoniche con scia.

AZIONI DINAMICHE SU SOLIDI.

§1.

Le *azioni* che una corrente fluida esercita sulla superficie σ di un solido immerso in essa sono caratterizzate da due vettori: il loro risultante ed il loro momento risultante rispetto ad un punto.



Se $\mathbf{p}_{(n)}$ è lo sforzo che il fluido esercita in un punto P di un elemento $d\sigma$ di versore normale $\mathbf{n}$ orientato verso l'esterno del campo occupato dal fluido, i due vettori sopra introdotti sono rispettivamente:

$$\int_{\sigma} \mathbf{p}_{(n)} d\sigma \quad \text{e} \quad \int_{\sigma} (\mathbf{P}-\mathbf{O}) \times \mathbf{p}_{(n)} d\sigma.$$

In condizioni statiche, a parità di ogni altra condizione, essi valgono:

$$\int_{\sigma} \mathbf{p}_0 \mathbf{n} d\sigma \quad \text{e} \quad \int_{\sigma} (\mathbf{P}-\mathbf{O}) \times \mathbf{p}_0 \mathbf{n} d\sigma.$$

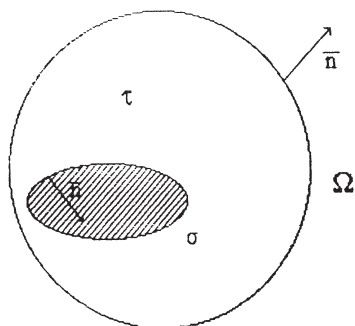
Pertanto le azioni dinamiche provocate dal moto del fluido sono caratterizzate dai due vettori:

$$\mathbf{R} = \int_{\sigma} (\mathbf{p}_{(n)} - \mathbf{p}_0 \mathbf{n}) d\sigma; \quad \mathbf{M}_0 = \int_{\sigma} (\mathbf{P}-\mathbf{O}) \times (\mathbf{p}_{(n)} - \mathbf{p}_0 \mathbf{n}) d\sigma.$$

Se si considera un solido S delimitato da σ , in moto traslatorio in seno al fluido con velocità $\mathbf{c}$, la componente di $\mathbf{R}$ secondo $-\mathbf{c}$ si chiama la *resistenza*, la componente normale a $\mathbf{c}$ si dice *forza deviatrice*. La *portanza* è una forza deviatrice. Il momento $\mathbf{M}_0$ si dice *momento deviatore*.

Consideriamo ora un solido in moto traslatorio uniforme con velocità $\mathbf{c}$ in seno ad un fluido infinitamente esteso ed in quiete all'infinito. Siano $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{M}_0$ i vettori caratteristici delle azioni dinamiche sul solido. Rispetto ad un osservatore collegato col corpo e che quindi si muove di moto traslatorio uniforme, il solido risulta in quiete ed il fluido lo investe con una corrente di velocità asintotica $-\mathbf{c}$. Per il principio di relatività galileiana le azioni dinamiche valutate dall'osservatore in moto sono ancora caratterizzate dai medesimi vettori $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{M}_0$.

Consideriamo ora una corrente fluida che investe un ostacolo delimitato da una superficie σ ed applichiamo il teorema della quantità di moto alla massa fluida τ esterna a σ e contenuta entro una superficie sferica Ω di raggio d convenientemente grande. Sarà:



$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \int_{\tau} \mathbf{F} d\tau - \int_{\sigma} \mathbf{p}_{(n)} d\sigma - \int_{\Omega} \mathbf{p}_{(n)} d\Omega$$

se $\mathbf{F}$ è la forza di massa per unità di volume e $\mathbf{p}_{(n)}$ è lo sforzo sull'elemento di superficie relativo alla direzione della normale $\mathbf{n}$ orientata verso l'esterno di τ .

Col fluido in quiete, a parità di tutte le altre condizioni, si ha:

$$0 = \int_{\tau} \mathbf{F} d\tau - \int_{\sigma} p_0 \mathbf{n} d\sigma - \int_{\Omega} p_0 \mathbf{n} d\Omega$$

e sottraendo membro a membro le due relazioni si ricava:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = - \int_{\sigma} (\mathbf{p}_{(n)} - p_0 \mathbf{n}) d\sigma - \int_{\Omega} (\mathbf{p}_{(n)} - p_0 \mathbf{n}) d\Omega$$

Si ottiene così:

$$\mathbf{R} = - \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau - \mathbf{R}(\Omega)$$

Con analogo ragionamento, per il teorema del momento delle quantità di moto deduciamo:

$$\mathbf{M}_0 = - \frac{d}{dt} \int_{\tau} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \rho \mathbf{v} d\tau - \mathbf{M}_0(\Omega)$$

Se il moto è tale che su Ω le azioni dinamiche sono nulle (ad esempio per $d \rightarrow \infty$, quando il fluido è in quiete all'infinito) si ricavano le formule fondamentali che danno i vettori caratteristici delle azioni dinamiche sull'ostacolo:

$$\mathbf{R} = - \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau ;$$

$$\mathbf{M}_0 = - \frac{d}{dt} \int_{\tau} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times \rho \mathbf{v} d\tau .$$

Per quanto abbiamo già osservato, queste formule esprimono anche le azioni dinamiche che si esercitano sulla superficie σ di un corpo che si muove in seno ad un fluido infinitamente esteso, quando all'infinito, dove il fluido è in quiete, vengono meno il risultante ed il momento risultante delle azioni dinamiche da questo esercitate. E' importante infine osservare che vale l'identità:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau + \int_{\Omega} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega$$

Infatti:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \int_{\tau} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho d\tau + \int_{\tau} \mathbf{v} \frac{d}{dt} (\rho d\tau) .$$

Essendo $\frac{d}{dt} (\rho d\tau) = 0$ per il principio di conservazione della massa e ricordando che:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{h=1}^3 v_h \mathbf{v}_{/h}$$

si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \rho d\tau + \int_{\tau} \sum_{h=1}^3 \rho v_h \mathbf{v}_{/h} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \rho d\tau + \int_{\tau} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial(\rho v_h \mathbf{v})}{\partial x^h} d\tau - \int_{\tau} \mathbf{v} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial(\rho v_h)}{\partial x^h} d\tau = \\
&= - \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \rho d\tau + \int_{\Omega+\sigma} \sum_{h=1}^3 \rho v_h \mathbf{v} n_h d\Omega - \int_{\tau} \mathbf{v} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\tau = \\
&= - \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \rho d\tau + \int_{\tau} \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_{\Omega} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega
\end{aligned}$$

in quanto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ su σ è uguale a zero e, per la equazione di continuità, $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Il risultato ottenuto conferma la identità cercata.

E' interessante osservare che l'integrale $\int_{\Omega} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega$ è il flusso di quantità di moto uscente dalla superficie Ω , in quanto $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Omega$ è il flusso di materia passante per l'elemento $d\Omega$ e quindi $\mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega$ è il flusso di quantità di moto passante per lo stesso elemento.

Calcoliamo le azioni dinamiche che si esercitano su di un solido che si muova in un gas perfetto di moto traslatorio rettilineo con velocità $\mathbf{c}$ eventualmente variabile col tempo. Il moto indotto sia regolare e si spenga all'infinito. Questo movimento, come è tipico per i gas perfetti, sia irrotazionale ed il gas si comporti come incompressibile. Essendo $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ($\rho = \text{cost.}$) e $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi$) si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= - \rho \frac{d}{dt} \int_{\tau} \mathbf{v} d\tau = - \rho \frac{d}{dt} \int_{\tau} \operatorname{grad} \phi d\tau = - \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \phi \mathbf{n} d\sigma \\
\mathbf{M}_0 &= - \rho \frac{d}{dt} \int_{\tau} (\mathbf{P}-\mathbf{O}) \times \mathbf{v} d\tau = - \rho \frac{d}{dt} \int_{\tau} (\mathbf{P}-\mathbf{O}) \times \operatorname{grad} \phi d\tau = \\
&= - \rho \frac{d}{dt} \int_{\tau} \operatorname{rot}[\phi(\mathbf{P}-\mathbf{O})] d\tau = - \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} (\mathbf{P}-\mathbf{O}) \times \phi \mathbf{n} d\sigma.
\end{aligned}$$

Diciamo x_i ($i = 1, 2, 3$) gli assi cartesiani di riferimento connessi al solido e se la velocità $\mathbf{c}$ del solido è ad esempio diretta come l'asse x_1 il potenziale cinetico φ ad essa relativo è proporzionale alla componente c_1 di $\mathbf{c}$ secondo tale asse. Ciò perché φ possiede le dimensioni di una velocità per una lunghezza e se si assume c_1 come velocità caratteristica sarà:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, c_1) = c_1 \varphi_1(x_1, x_2, x_3),$$

essendo $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ il potenziale cinetico relativo al moto indotto quando c_1 è unitaria.

Se invece:

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{i}_1 + c_2 \mathbf{i}_2 + c_3 \mathbf{i}_3$$

potremo pensare il movimento scomposto in tre movimenti ed il potenziale cinetico somma dei tre potenziali corrispondenti:

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 c_i \varphi_i$$

con φ_i ($i=1, 2, 3$) funzioni armoniche nel campo τ e perfettamente determinabili.

Si avrà:

$$\mathbf{R} = -\rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \sum_{i=1}^3 c_i \varphi_i \mathbf{n} \, d\sigma = - \sum_{i=1}^3 \frac{dc_i}{dt} \int_{\sigma} \rho \varphi_i \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Introdotti i vettori:

$$\mathbf{m}_i = \rho \int_{\sigma} \varphi_i \mathbf{n} \, d\sigma$$

si può allora scrivere:

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{m}_i \frac{d\mathbf{c}_i}{dt} = -\mathbf{R}.$$

Per formale analogia con la seconda legge fondamentale della dinamica del punto materiale i tre vettori $\mathbf{m}_i$ ($i=1, 2, 3$) si può dire che costituiscono le cosiddette *masse apparenti* dell'ostacolo, dipendenti dalla forma di questo, dalla densità del fluido e dal suo campo di moto.

§2.

Azioni dinamiche su di una superficie σ nei moti stazionari irrotazionali di fluidi perfetti incomprimibili.

Per definizione è:

$$\mathbf{R} = \int_{\sigma} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \mathbf{n} \, d\sigma \quad \mathbf{M}_0 = \int_{\sigma} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Si può scrivere la relazione che traduce il teorema di Bernoulli durante il moto:

$$\frac{1}{2} v^2 - U + \frac{p}{\rho} = \text{cost.}$$

da cui:

$$p = \text{cost.} + \rho U - \frac{1}{2} \rho v^2.$$

In condizioni statiche:

$$p_0 = \text{cost.} + \rho U$$

e quindi:

$$p - p_0 = -\frac{1}{2} \rho v^2.$$

Si ricava:

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{2} \rho \int_{\sigma} v^2 \mathbf{n} \, d\sigma \quad \mathbf{M}_0 = -\frac{1}{2} \rho \int_{\sigma} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times v^2 \mathbf{n} \, d\sigma$$

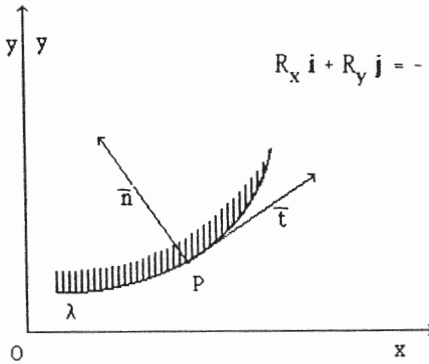
che esprimono le azioni dinamiche su di una generica superficie di flusso σ .

§3.

Formule di Blasius.

Le formule scritte nel §2 diventano particolarmente espressive nel caso di un moto piano, in cui σ è sostituita da una linea di flusso.

Siano R_x ed R_y le componenti secondo gli assi cartesiani nel piano del moto della forza $\mathbf{R}$ per unità di altezza che si esercita su di una linea di flusso λ . Si ha evidentemente:



$$R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} = -\frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} v^2 (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}) ds$$

dove n_x ed n_y sono le due componenti cartesiane del versore $\mathbf{n}$ normale a λ nel suo generico punto P. Poichè, come è noto, se s è l'ascissa curvilinea su λ il versore $\mathbf{t}$ della tangente è dato da:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{P}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}$$

si ha:

$$\mathbf{n} = -\frac{dy}{ds} \mathbf{i} + \frac{dx}{ds} \mathbf{j}$$

e quindi:

$$R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} = -\frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} v^2 (-dy \mathbf{i} + dx \mathbf{j})$$

Essendo allora:

$$R_x = \frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} v^2 dy, \quad R_y = -\frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} v^2 dx$$

introdotta la variabile complessa $z = x + i y$ e la velocità complessa $w(z) = v_x + i v_y$ avremo

$$R_y + i R_x = -\frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} w \bar{w} d\bar{z}.$$

Ma osserviamo che:

$$\bar{w} d\bar{z} = (v_x + i v_y) (dx - i dy) = v_x dx + v_y dy + i (v_y dx - v_x dy)$$

$$w dz = (v_x - i v_y) (dx + i dy) = v_x dx + v_y dy + i (v_x dy - v_y dx).$$

Poichè λ è una linea di flusso e quindi su di essa $v_x dy = v_y dx$, su λ risulta $\bar{w} d\bar{z} = w dz$ per cui:

$$R_y + i R_x = -\frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} w^2 dz.$$

Questa formula dà il risultante delle azioni dinamiche su di una linea di flusso λ mediante il calcolo, lungo tale linea, di un integrale rispetto alla variabile complessa z della funzione w^2 di tale variabile.

Sia ora $M = M_z$ l'unica componente non nulla di $\mathbf{M}_0$, vettore ortogonale al piano del moto. E', come si può controllare con calcolo diretto:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} (x n_y - y n_x) v^2 dz = -\frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} v^2 (x dx + y dy) = \\ &= -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Real} \int_{\lambda} z w^2 dz. \end{aligned}$$

Le formule ottenute:

$$R_y + i R_x = -\frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} w^2 dz$$

$$M = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Real} \int_{\lambda} z w^2 dz$$

sono le famose *formule di Blasius* che andavamo cercando.

Si osservi che esse presuppongono che la terna cartesiana di riferimento sia destra e che il verso positivo di percorrenza della linea λ sia quello indicato in figura. Si noti, in particolare, che percorrendo λ nel verso positivo si lascia il fluido sulla destra ed il solido alla sinistra.

§4.

Riepilogo.

Riassumiamo i risultati ottenuti nel § 3, in cui abbiamo ricavato le formule che esprimono il risultante ed il momento risultante delle azioni dinamiche che un fluido esercita su di un corpo delimitato dalla superficie σ .

Definizione.

$$\mathbf{R} = - \int_{\sigma} (\mathbf{p}_{(n)} - p_0 \mathbf{n}) d\sigma ; \quad \mathbf{M}_0 = - \int_{\sigma} (\mathbf{P} - O) \times (\mathbf{p}_{(n)} - p_0 \mathbf{n}) d\sigma .$$

Queste formule valgono incondizionatamente.

$$\mathbf{R} = - \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau ; \quad \mathbf{M}_0 = - \frac{d}{dt} \int_{\tau} (\mathbf{P} - O) \times \rho \mathbf{v} d\tau .$$

Pure queste formule valgono incondizionatamente per un fluido indefinitamente esteso in seno al quale si muove un solido delimitato da una superficie σ e che resta in quiete all'infinito dove svaniscono le azioni dinamiche.

$$\mathbf{R} = - \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma \quad \mathbf{M}_0 = - \rho \frac{d}{dt} \int_{\sigma} (\mathbf{P} - O) \times \varphi \mathbf{n} d\sigma .$$

Sono conseguenza delle precedenti formule, con le ulteriori ipotesi che il fluido sia incompressibile, il moto indotto sia irrotazionale, il potenziale cinetico φ sia regolare esternamente a σ .

$$\mathbf{R} = - \sum_{i=1}^3 \mathbf{m}_i \frac{dc_i}{dt}$$

dedotta dalle precedenti quando il solido trasla con velocità $\mathbf{c}(t) = \sum_{h=1}^3 c_h(t) \mathbf{i}_h$.

Anche:

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{2} \rho \int_{\sigma} v^2 \mathbf{n} d\sigma; \quad \mathbf{M}_0 = -\frac{1}{2} \rho \int_{\sigma} (\mathbf{P}-\mathbf{O}) \times v^2 \mathbf{n} d\sigma$$

sono dedotte dalle precedenti formule, con l'ulteriore ipotesi che il fluido sia perfetto ed il moto indotto sia stazionario.

Le formule di Blasius:

$$R_y + i R_x = -\frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} w^2 dz; \quad M = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Real} \int_{\lambda} z w^2 dz$$

sono conseguenza delle precedenti nel caso che il moto sia piano e la superficie σ è rappresentata nel piano direttore da una linea di flusso λ .

§5.

Il paradosso di D'Alembert.

Esso, in evidente contraddizione con l'esperienza, afferma:

E' nullo il risultante delle azioni dinamiche che si esercitano su di un solido che si muove di moto traslatorio uniforme in seno ad un fluido reale, quando il moto indotto è regolare e sono soddisfatte le condizioni asintotiche euleriane.

Per un corpo che si muova di moto traslatorio uniforme in seno ad un fluido incompressibile, quando il moto indotto è irrotazionale e regolare, il risultato è immediato. Infatti, poiché in tali ipotesi è:

$$\mathbf{R} = - \sum_{i=1}^3 \mathbf{m}_i \frac{d\mathbf{c}_i}{dt},$$

essendo ora $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$, si ricava:

$$\mathbf{R} = 0$$

Ad identico risultato si perviene calcolando il risultante delle azioni dinamiche che si esercitano su di un ostacolo investito da una corrente traslatoria stazionaria di un fluido comprimibile e viscoso, quando il moto, perturbato dalla presenza dell'ostacolo, è regolare e la velocità del fluido, per $r \rightarrow \infty$, tende al valore costante $\mathbf{c}$ a meno di termini infinitesimi dell'ordine di $1/r^3$.

Infatti, col solito significato dei simboli, è:

$$\mathbf{R} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau - \int_{\Omega} \mathbf{v}(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega - \mathbf{R}(\Omega)$$

$$\text{con } \mathbf{R}(\Omega) = \int_{\Omega} (p - p_0) \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{q}_n d\Omega.$$

Se supponiamo infinitamente grande il raggio r della sfera Ω e se ricordiamo che su di essa $\mathbf{v}$ differisce da $\mathbf{c}$ per termini che, per $r \rightarrow \infty$, si annullano almeno come $1/r^3$, poiché a meno di termini cosiffatti $p - p_0$ e ρ si riducono alle costanti $(p - p_0)_{\infty}$ e ρ_{∞} , si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = 0 \quad (\text{per la stazionarietà del moto});$$

$$\rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{v}(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega = \mathbf{c} \int_{\Omega} \rho_{\infty} \mathbf{n} d\Omega = 0 \quad (\text{perché } \int_{\Omega} \mathbf{n} d\Omega = 0);$$

$$\int_{\Omega} (p - p_0) \mathbf{n} d\Omega = (p - p_0)_{\infty} \int_{\Omega} \mathbf{n} d\Omega = 0;$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{q}_n d\Omega = 0$$

(perché $\mathbf{q}_n$ è funzione lineare delle derivate di $\mathbf{v}$ le quali, per $r \rightarrow \infty$, si annullano su Ω almeno come $1/r^4$).

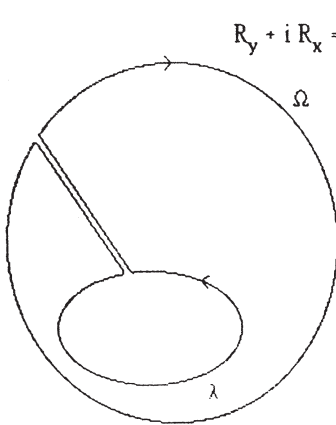
Segue il risultato paradossale:

$$R = 0.$$

Pertanto, pur considerando la comprimibilità e la viscosità del fluido in modo diretto attraverso le equazioni di Navier - Poisson, vale il paradosso di D'Alembert. Per rimuoverlo bisogna rinunciare o alla regolarità del moto o alle condizioni asintotiche euleriane.

Data l'importanza del paradosso diamone la dimostrazione nel caso piano nelle ipotesi in cui sono applicabili le formule di Blasius, anche allo scopo di introdurre un tipo di considerazioni che verranno utilizzate nel seguito.

Consideriamo *una corrente traslatoria euleriana* il cui potenziale complesso $f(z)$ differisce per una funzione regolare nulla all'infinito dalla funzione cz che definisce il moto traslatorio asintotico. Sia λ la linea di flusso che costituisce il profilo investito dalla corrente. E':



$$R_y + i R_x = - \frac{1}{2} \rho \int_{\lambda} w^2 dz \quad \left(w = \frac{df}{dz} \right).$$

Ma w^2 è una funzione della variabile complessa z regolare esternamente a λ ; se Ω è una circonferenza di raggio sufficientemente grande che contiene λ nel suo interno, per il teorema di Cauchy è:

$$\int_{\lambda} w^2 dz = \int_{\Omega} w^2 dz$$

e quindi:

$$R_y + i R_x = - \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} w^2 dz.$$

Nei punti di Ω vale il seguente sviluppo in serie

$$f(z) = cz + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

e quindi:

$$w(z) = c - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \dots$$

per cui:

$$w^2 = c^2 - \frac{2ca_1}{z^2} + \frac{a_1^2}{z^4} + \dots$$

Non figurando nello sviluppo di w^2 un termine della forma b/z , il residuo (nel senso di Cauchy) è nullo, ossia:

$$\int_{\Omega} w^2 dz = 0$$

Ciò è evidente in quanto l'integrale esteso ad Ω di w^2 è somma di $\int_{\Omega} c^2 dz$ e di integrali del tipo $\int_{\Omega} \frac{h dz}{z^n}$ con $n \geq 2$. Gli integrali indefiniti sono le funzioni uniformi $c^2 z$ e $\frac{h}{1-n} z^{1-n}$ che nel calcolo dell'integrale lungo Ω vanno limitati fra un punto d'arrivo ed uno di partenza coincidenti.

Conformemente al paradosso di D'Alembert si ha:

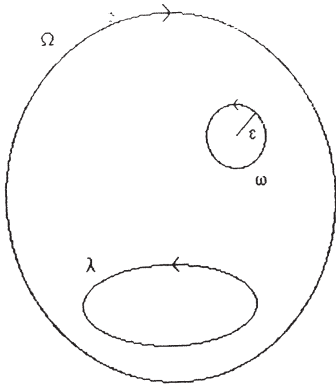
$$R_y + i R_x = 0.$$

§6.

La viscosità, fino ad ora trascurata, può *indirettamente*, come abbiamo già detto, far cadere il paradosso se si pensa che, dovendo il fluido aderire alle pareti, può ivi provocare la formazione di vortici. Questi vortici possono distaccarsi dalle pareti ed invadere il campo di moto nel fluido riguardato ancora come perfetto.

Se ad esempio nel caso piano ora esaminato supponiamo che vi sia un punto di singolarità in z_0 , sempre per il teorema di Cauchy si avrà:

$$\int_{\lambda} w^2 dz = \int_{\Omega} w^2 dz - \int_{\omega} w^2 dz.$$



Se le condizioni asintotiche sono ancora tali che il primo integrale è nullo quando $r \rightarrow \infty$, non è detto che sia nullo il secondo integrale quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Se ad esempio nel punto di affissa z_0 vi è un vortice puntiforme di intensità J , la velocità complessa $w(z)$ si presenterà come somma di una funzione $u(z)$ regolare per $z = z_0$ dove assume il valore $u_0 = u(z_0)$,

più $\frac{J}{2\pi i(z-z_0)}$. Quindi su ω , a meno di termini infinitesimi, sarà:

$$w = u_0 + \frac{J}{2\pi i(z-z_0)}$$

$$w^2 = u_0^2 - \frac{J^2}{4\pi^2(z-z_0)^2} + \frac{J u_0}{\pi i(z-z_0)}.$$

Gli integrali indefiniti dei primi due addendi sono funzioni uniformi e quindi gli integrali lungo la curva chiusa ω sono nulli. L'integrale indefinito del terzo addendo è $\frac{J u_0}{\pi i} \log(z - z_0)$ che invece *non è uniforme*. Poiché su ω è:

$$z - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$$

sarà:

$$\int_{\omega} w^2 dz = \int_{\omega} \frac{J u_0 dz}{\pi i(z-z_0)} = \frac{J u_0}{\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon e^{i\theta} i d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = 2 J u_0.$$

Pertanto:

$$R_V - i R_N = \frac{1}{2} \rho \int_{\omega} w^2 dz = J \rho u_0.$$

Venendo meno la regolarità, viene meno anche il paradosso

§7.

Senza singolarità nel campo del moto e con condizioni asintotiche euleriane vige il paradosso di D'Alembert ed il risultante delle azioni dinamiche che il fluido esercita su di un ostacolo è nullo.

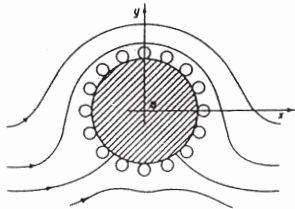
Neppure la viscosità, direttamente considerata attraverso le equazioni di Navier-Poisson, elude il paradosso. Per adeguare lo schema matematico ai fenomeni aerodinamici tanto vale considerare l'aria, pochissimo viscosa, come fluido perfetto ma porre nel campo del moto delle singolarità.

Il caso più semplice è quello in cui vortici sono distribuiti al contorno del profilo, cosicché l'atto di moto è regolare in tutto il campo, anzi armonico, mentre sul contorno si realizza l'adesione completa del fluido alla superficie del solido.

Applichiamo questo schema alle correnti piane. Nel piano del moto l'ostacolo sia rappresentato da un profilo lambito da una corrente stazionaria armonica, la quale si riduca all'infinito ad una traslazione uniforme di velocità c diretta come l'asse x .

Se i vortici distribuiti sul profilo hanno intensità complessiva nulla, è nullo anche il vortice all'infinito, la corrente risulta traslatoria euleriana e sussiste ancora il paradosso di D'Alembert.

Non così se l'intensità complessiva dei vortici distribuiti sul profilo è J .



Se ad esempio il profilo è un cerchio con centro nell'origine e raggio uguale ad a , quando sul profilo siano distribuiti tanti vortici di intensità complessiva J , sappiamo che la corrente è caratterizzata come segue:

$$f(z) = c \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{J}{2\pi i} \log z$$

$$w(z) = v_1 - i v_2 = c \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{J}{2\pi i z}$$

La corrente considerata è traslocircolatoria ed ha come circolazione $\Gamma = J$.

Nel caso di un profilo qualunque λ basta operare un cambiamento di variabile complessa

$$z = z(\xi)$$

così che al piano della variabile complessa $z = x + iy$ forato secondo il cerchio di raggio unitario, corrisponda il piano della variabile complessa $\zeta = \xi + i \eta$, forato secondo il profilo λ ed al punto all'infinito del piano delle z corrisponda il punto all'infinito del piano delle ζ .

Si ha così:

$$F(\zeta) - f[z(\zeta)] = c \left(z(\zeta) + \frac{1}{z(\zeta)} \right) + \frac{J}{2\pi i} \log z(\zeta)$$

$$W(\zeta) = \frac{dF}{d\zeta} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{d\zeta} =$$

$$= \left\{ c \left(1 - \frac{a^2}{z^2(\zeta)} \right) + \frac{J}{2\pi i z(\zeta)} \right\} \frac{dz}{d\zeta}.$$

E' questa la corrente traslocircolatoria che investe il profilo λ .

In questa corrente i vortici distribuiti sul contorno hanno ancora intensità complessiva J e quindi la circolazione è ancora $\Gamma = J$, ma la velocità asintotica della corrente è data dal numero complesso:

$$W_{\infty} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} W = c \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dz}{d\zeta}.$$

Constatiamo subito che le correnti traslocircolatorie non verificano le condizioni asintotiche euleriane. Infatti all'infinito $f(z)$ non differisce da cz per una funzione regolare e così pure w non differisce da c per una funzione che si annulla all'infinito almeno come $1/r^2$. All'infinito si sente così la presenza del profilo e ciò è dovuto al fatto che all'infinito si sono rifugiati i vortici che si sono generati insieme a quelli che si trovano sul profilo, per una intensità complessiva eguale a $-J$.

§8.

Il teorema di Kutta - Joukowski.

Per la prima delle formule di Blasius si ha, sul cerchio:

$$R_y + i R_x = -\frac{\rho}{2} \int_{\lambda} \left[c^2 \left(1 + \frac{a^4}{z^4} - \frac{2a^2}{z^2} \right) - \frac{J}{4\pi^2 z^2} + \frac{cJ}{\pi i z} - \frac{ca^2 J}{\pi i z^3} \right] dz =$$

$$= -\frac{\rho}{2} \int_{\lambda} \frac{c_j}{\pi iz} dz$$

in quanto tutti gli altri integrali indefiniti sono funzioni uniformi e calcolati lungo una linea chiusa danno contributo nullo. D'altra parte, sulla circonferenza di raggio a si ha:

$$z = a e^{i\theta}, \quad dz = a i e^{i\theta} d\theta,$$

e quindi:

$$R_y + i R_x = -\frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \frac{c_j a i e^{i\theta} d\theta}{\pi i a e^{i\theta}} = -\rho c_j.$$

Come si vede il risultante delle azioni dinamiche non è nullo. Si ha:

$$R_x = 0 \quad R_y = -\rho c_j.$$

Questo risultato costituisce il teorema di Kutta - Joukowsky per un profilo di forma circolare.

Essendo $R_x = 0$, è nulla la componente secondo la direzione della velocità asintotica della corrente. *E' dunque nulla la resistenza.*

Essendo $R_y = -\rho c_j$ *non è invece nulla la forza deviatrice.* Se la velocità asintotica è orizzontale ed il piano del moto è verticale, a questa corrisponde una *portanza*. La componente secondo la verticale orientata verso l'alto, la portanza, è positiva se la circolazione è oraria ($\Gamma = J < 0$), negativa se la circolazione è antioraria ($\Gamma = J > 0$).

Il teorema di Kutta - Joukowsky si può estendere ad un generico profilo γ passando, con una trasformazione conforme, dal piano delle z forato secondo il cerchio λ di raggio unitario a quello delle ζ forato secondo γ . Sarà:

$$\begin{aligned}
 R_2 + i R_1 &= -\frac{1}{2} \rho \int_{\gamma} W(\zeta)^2 d\zeta = \\
 &= -\frac{1}{2} \rho \int_{\gamma} \left\{ c \left(1 - \frac{a^2}{z^2(\zeta)} \right) + \frac{J}{2\pi i z(\zeta)} \right\}^2 \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^2 d\zeta
 \end{aligned}$$

od anche, essendo $\frac{dz}{d\zeta} d\zeta = dz$,

$$R_2 + i R_1 = -\frac{1}{2} \rho \int_{\gamma} \left\{ c \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{J}{2\pi i z} \right\}^2 \frac{dz}{d\zeta} dz.$$

Con un calcolo analogo a quello già visto, tenendo conto della regolarità della funzione $\frac{dz}{d\zeta}$, si ricava:

$$R_2 + i R_1 = -\rho W_{\infty} J$$

che è identica alla formula relativa al profilo circolare ed estende ad un generico profilo il teorema di Kutta - Joukowski. Esso si può quindi enunciare così:

Il risultante delle azioni dinamiche in una corrente traslocircolatoria che investe un ostacolo è un'azione deviatrice, perpendicolare alla direzione asintotica della corrente, nel verso ottenuto rotando questa di un angolo retto nel senso opposto alla circolazione, ed in modulo uguale al prodotto della densità del fluido per i moduli della velocità asintotica e della circolazione.

Ci si può rendere conto qualitativamente in modo intuitivo della validità del teorema osservando che là dove la corrente traslatoria e circolatoria sono concordi la velocità del fluido è maggiore che dove esse sono discordi: nella prima regione la pressione è quindi minore che nella seconda e da ciò una azione deviatrice.

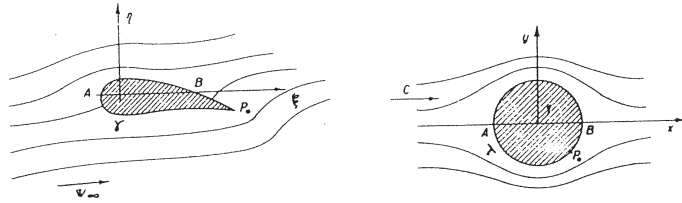
§ 9.

Corrente traslocircolatoria generata da un'ala di apertura infinita.

Per generare una corrente traslocircolatoria attorno ad un profilo circolare basta farlo ruotare attorno al suo centro mentre lo investe una

corrente traslatoria. Un processo del tutto diverso avviene quando si genera una corrente traslocircolatoria attorno ad un profilo alare.

Un'ala d'apertura infinita è rappresentata nel piano direttore del moto (verticale) da un profilo allungato γ , il quale presenta un punto P_0 angoloso all'estremità posteriore, che rappresenta il *lembo d'uscita*, mentre è arrotondato all'estremità anteriore, che rappresenta il *lembo d'entrata*.



Nel piano del moto $\zeta = \xi + i\eta$ sia $W(\zeta)$ la velocità complessa di una corrente traslatoria che investe l'ala, con velocità asintotica complessa W_∞ . Questa corrente traslatoria è ottenuta dalla corrente euleriana che investe il cerchio λ di raggio unitario, nel piano della variabile complessa $z = x + iy$, con la trasformazione conforme :

$$z = z(\zeta)$$

che muta il piano forato secondo il cerchio λ nel piano della ζ forato secondo il profilo γ , mentre per $z \rightarrow \infty$ è $\zeta \rightarrow \infty$, e risulta:

$$W(\zeta) = c \left(1 - \frac{1}{z^2(\zeta)} \right) \frac{dz}{d\zeta}$$

$$W_\infty = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} W = c \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dz}{d\zeta}$$

Fra le linee di flusso che investono γ vi è il filone che, provenendo dall'infinito a monte, incontra il profilo γ nel *punto di prora* A, dove la velocità si annulla. Qui il filone si suddivide in due parti: una segue il *dorso* del profilo sino al *punto B di poppa*, dove la velocità si annulla, l'altra segue il *ventre* dell'ala fino a P_0 e poi monta sul dorso fino a B. Da B il filone prosegue all'infinito a valle.

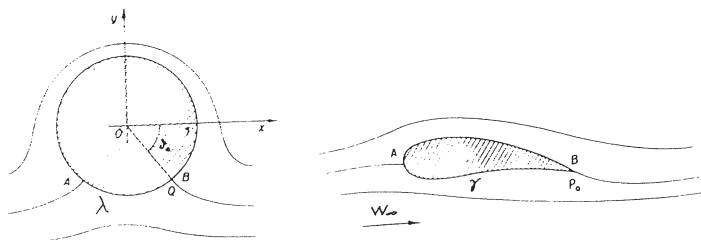
Nel punto angoloso P_0 la rappresentazione conforme non è regolare e $dz/d\zeta$ diviene infinita. In P_0 la velocità tangenziale V è infinita e poiché, come sappiamo, essa dà la densità j vorticoso, in P_0 si può formare un vortice puntiforme di intensità finita $-J_0$.

Ricordiamo ora che in un fluido perfetto, sotto l'azione di forze conservative, l'intensità complessiva dei vortici deve mantenersi nulla, se tale era all'inizio del moto. Ne segue che se in P_0 si forma un vortice di intensità $-J_0$, nei punti di γ devono formarsi dei vortici distribuiti con continuità, di intensità complessiva J_0 . Il vortice in P_0 non è stabile e, trascinato dalla corrente, si stacca dal profilo. La corrente si modifica profondamente e diviene non stazionaria. In un generico istante t vi sono in seno ad essa i vortici mobili che antecedentemente si sono staccati da P_0 , per una intensità complessiva $-J(t)$ e vi sono i vortici rimasti sul profilo, per una intensità complessiva $J(t)$. Il punto di prora A e quello di poppa B cambiano posizione su γ e B si avvicina a P_0 .

Quando $B \equiv P_0$ la corrente diviene stazionaria: da P_0 non si staccano più vortici, perchè il punto B di poppa è in P_0 , così che in questo punto la velocità non è più infinita; i vortici precedentemente distaccatisi dal profilo si sono ormai allontanati indefinitamente. Resta su γ una distribuzione continua di vortici di intensità complessiva data da $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t)$ e quindi la corrente a regime è traslocircolatoria con circolazione:

$$\Gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} J(t).$$

In questa corrente traslocircolatoria la poppa B deve cadere in P_0 e ciò determina univocamente Γ .



Infatti la corrente traslocircolatoria di regime che investe il profilo γ è quella alla quale si perviene applicando la stessa trasformazione conforme prima considerata, partendo però dalla corrente traslocircolatoria che investe il profilo λ . Si ha:

$$w(z) = c \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi iz}$$

per cui risulta:

$$W(\zeta) = \left\{ c \left(1 - \frac{a^2}{z^2(\zeta)} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi iz(\zeta)} \right\} \frac{dz}{d\zeta}.$$

Detta ζ_0 l'affissa di P_0 e detta $z_0 = z(\zeta_0)$ l'affissa del punto B corrispondente su λ , deve risultare $w(z_0) = 0$ affinché $W(\zeta_0)$ si mantenga finita benché $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{dz}{d\zeta} = \infty$. Si trae:

$$c \left(1 - \frac{a^2}{z_0^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi iz_0} = 0$$

ossia:

$$z_0 - \frac{1}{z_0} = - \frac{\Gamma}{2\pi ic}.$$

Poichè B è sul cerchio di raggio unitario sarà, detta θ_0 l'anomalia di B, $z_0 = e^{i\theta_0}$ e quindi la formula precedente porge:

$$e^{i\theta_0} - e^{-i\theta_0} = - \frac{\Gamma}{2\pi ic}$$

da cui:

$$\Gamma = 4\pi c \sin\theta_0.$$

In conclusione un'ala trasforma una corrente traslatoria che la investe in una corrente traslocircolatoria, avente la medesima velocità asintotica W_∞ ed avente circolazione Γ data dalla formula ottenuta.

Se al posto di c si pone il valore dato da :

$$W_\infty = c \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{dz}{d\xi}$$

da cui

$$c = W_\infty \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d\xi}{dz}$$

si ottiene per Γ :

$$\Gamma = 4\pi \sin\theta_0 W_\infty \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d\xi}{dz}$$

L'ala pertanto subirà delle azioni dinamiche, per unità di apertura alare, il cui risultante R è dato dal teorema di Kutta- Joukowski:

$$R_2 + i R_1 = -\rho W_\infty \Gamma = -4\pi \sin\theta_0 \rho W_\infty^2 \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d\xi}{dz}$$

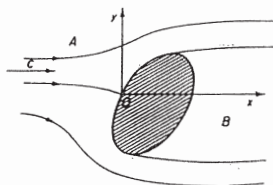
R , come avviene in generale, è orientato normalmente alla velocità asintotica della corrente.

Ecco spiegato come su di un'ala si eserciti una portanza, come cioè un'ala possa adempiere il suo ufficio essenziale.

§ 10

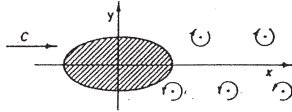
Scie.

Una distribuzione di vortici al contorno di un profilo investito da una corrente basta a giustificare la portanza.



Per giustificare la resistenza basta distribuire vortici entro il fluido a valle del solido. Il più semplice schema è quello di Helmholtz: una scia d'aria turbolenta, mediamente in quiete, si trova a valle dell'ostacolo inve-

stito dalla corrente. L'*aria morta* della scia è separata dall'*aria viva* da una superficie di discontinuità, cioè da uno strato vorticoso. Grazie alla singolarità costituita da questo strato si manifesta una resistenza che, si dimostra, è proporzionale al quadrato della velocità asintotica della corrente.



Un'altra scia che si presenta comunemente è quella di von Karman, formata da due schiere alternate di vortici.

La resistenza che ne risulta è ancora proporzionale al quadrato della velocità asintotica della corrente ed alla distanza h fra le due schiere.

§ 11.

Strato limite.

Il giuoco delle singolarità ha consentito di eludere il paradosso di D'Alembert. Ma dove si formano e come si formano i vortici (rappresentati matematicamente con singolarità) destinati a formare le scie? In un sottile strato aderente alle pareti, dove l'aria non può essere considerata come un fluido perfetto ma un fluido viscoso, e dove possono quindi formarsi e distruggersi vortici.

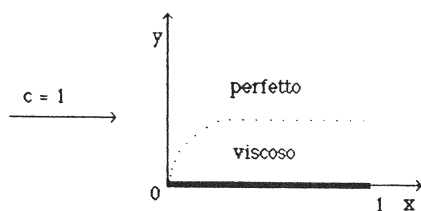
E' questo lo *strato limite*, la cui teoria fu istituita da Prandtl.

Lo strato limite, con la sua viscosità, è *direttamente* responsabile della resistenza d'attrito; con i vortici che vi si formano e che si distaccano, popolando la scia, è *indirettamente* responsabile della resistenza di scia. Facendo sì che i punti di distacco distino poco fra loro, poco discoste risultano le due schiere alternate di vortici nella scia di von Karman, piccola risulta quindi la resistenza e *buona la penetrazione*.

Vediamo ora di scrivere, almeno in un caso molto semplice, le equazioni differenziali che reggono il moto del fluido nello strato limite.

Ricordiamo che le equazioni adimensionali per i fluidi viscosi, trascurando le forze esterne di massa, sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} \right) = - \text{grad } p + \frac{1}{R_e} \left(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \text{grad div } \mathbf{v} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ f(p, \rho) = 0 \end{array} \right. \quad \left(R_e = \frac{\rho_0 v_0 l_0}{\mu} \right)$$



Consideriamo una corrente piana stazionaria di un fluido incomprimibile che lambisce una lamina. Nel piano xy di moto la lamina è rappresentata dal segmento di asse x che va dal punto di ascissa 0 al punto di ascissa 1.

Esiste uno straterello aderente alla lamina dove il fluido deve riguardarsi come viscoso, mentre esternamente a tale strato il fluido si può considerare perfetto, in moto traslatorio uniforme con velocità adimensionale uguale ad 1. Nel piano xy del moto le equazioni entro lo strato limite sono, dette u e v le componenti cartesiane della velocità e ponendo uguale ad 1 la densità adimensionale ρ :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Se δ è lo spessore dello strato limite in un generico punto della lamina ed $\varepsilon = \delta/l$ è lo spessore adimensionale, ε deve riguardarsi come una quantità infinitesima.

Esaminiamo i vari ordini di grandezza dei termini che compaiono nelle equazioni del moto:

u , come la velocità della corrente fuori dello strato limite, è dell'ordine dell'unità, e così pure $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{\varepsilon}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\varepsilon^2}$; v e così pure $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\approx \varepsilon$;

$\frac{\partial v}{\partial y} \approx 1$; $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\varepsilon}$; $\frac{\partial p}{\partial x} \approx 1$, come la pressione adimensionale del fluido perfetto a cui deve raccordarsi al confine dello strato limite.

Tenendo conto di questi ordini di grandezza, la prima delle equazioni mostra che $\frac{1}{R_e}$ deve risultare dell'ordine di ε^2 , cioè ε dell'ordine di $1/\sqrt{R_e}$. Se ad esempio c è dell'ordine dei m/sec, l dell'ordine dei metri, poiché nell'aria μ/ρ_0 è dell'ordine di 10^{-5} m²/sec, $R_e \approx 10^5$ $\varepsilon \approx 1/\sqrt{10^5}$. Ne segue che lo spessore vero dello strato limite è dell'ordine dei millimetri.

Trascurando nelle equazioni del moto i termini infinitesimi di fronte ai termini finiti, queste si riducono a :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Poiché $p = p(x)$, le equazioni scritte assumono la forma definitiva:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

dove p deve riguardarsi come funzione nota di x , perché si eguaglia tale pressione adimensionale a quella che si manifesta nel fluido perfetto esternamente allo strato limite, quando ci si avvicina indefinitamente alla lamina.

Osservazione.

Consideriamo il vettore $2 \boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$. Esso in questo caso è caratterizzato dall'unico scalare:

$$2 \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Poiché $\frac{\partial v}{\partial x} \approx \varepsilon$ e $\frac{\partial u}{\partial y} \approx 1/\varepsilon$ sarà:

$$-2 \omega = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Entro lo strato limite vi sono vortici di grande intensità appunto perché ω è dell'ordine di $1/\varepsilon$. Ciò si accorda con quanto abbiamo visto in precedenza, dove lo strato limite era addirittura sostituito da uno straterello di spessore infinitesimo in cui però ω era infinitamente grande.

Per determinare il moto nello strato limite bisogna integrare le equazioni indefinite ponendo le condizioni al contorno.

Poiché il fluido deve aderire completamente alla lamina si ha:

$$\text{per } y = 0 \qquad u = 0; v = 0.$$

Al confine tra strato limite e regione occupata dal fluido perfetto vi deve essere raccordo sia delle velocità che degli sforzi per cui, se V/v_0 è la velocità adimensionale nel fluido perfetto quando $y \rightarrow 0$:

$$\text{per } y = \varepsilon \qquad \begin{cases} u = V/v_0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (V/v_0) \end{cases}$$

Quando si conosca $\varepsilon = \varepsilon(x)$, le ultime relazioni scritte costituiscono due condizioni assegnate. Quando non si conosca $\varepsilon = \varepsilon(x)$, una di esse può servire a calcolare questa funzione che dà in ogni punto della lamina lo spessore dello strato limite. Ma ci fermiamo qui, senza approfondire questi ulteriori aspetti del problema.

Francesco Borghero, Professore Associato di Fisica Matematica (attualmente fuori ruolo) presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Cagliari ha tenuto, per più di trent'anni, numerosi corsi di Meccanica Razionale per matematici, fisici ed ingegneri, Istituzioni di Fisica Matematica, Fisica Matematica, Relatività Speciale e Relatività Generale per matematici. Nella sua attività di ricerca si è occupato di problemi inversi della Dinamica Lagrangiana, della Meccanica dei fluidi, dell'Ottica Geometrica con applicazione a microonde superficiali. Si è anche occupato della struttura matematica delle equazioni gravitazionali di Einstein. Infine, nell'ambito della Termodinamica Estesa, si è interessato allo studio della propagazione di onde nei gas relativistici ed ultrarelativistici. I risultati scientifici ottenuti in questi campi sono tutti pubblicati su riviste nazionali ed internazionali.

Francesco Demontis è professore Associato di Fisica Matematica presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Cagliari dove attualmente insegna Meccanica 1 e Relatività presso il corso di studio in Matematica. La sua attività di ricerca è rivolta principalmente allo studio di equazioni integrabili nonlineari di evoluzione tramite la Trasformata Inversa Spettrale. In particolare, in questo contesto, si è occupato della determinazione delle soluzioni solitoniche dei modelli studiati. In misura minore, si è interessato di propagazione ondosa nei gas ultrarelativistici nell'ambito della Termodinamica Estesa e di problemi inversi in Ottica Geometrica. I risultati scientifici ottenuti in questi campi sono tutti pubblicati su riviste nazionali ed internazionali.

Maria Polo è professore associato presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Cagliari dove attualmente insegna Storia ed Epistemologia della Matematica e Didattica della Matematica per il Corso di Studi della Laurea Magistrale in Matematica. Ha conseguito il Dottorato in Didattica della Matematica presso l'Università di Rennes I. La sua attività di ricerca riguarda l'analisi della "posizione insegnante", ed in particolare l'influenza dell'epistemologia dell'insegnante sulla pratica didattica. Anche in collaborazione, ha analizzato questioni incentrate sull'insegnamento della matematica, in ambienti di apprendimento che integrano le TIC e l'e-learning, e riguardanti la validazione e l'elaborazione di concetti del paradigma teorico della Didattica della matematica; ha studiato possibili modalità di trasposizione dei risultati delle ricerche in attività di formazione continua e iniziale degli insegnanti.

